

8. Elemi sorozatok

I^A . Mutassuk meg, hogy az alábbi sorozatok határértéke végtelen a definíció szerint.

1. $a_n = \sqrt{n^2 - n}$
2. $a_n = n^3 - 3n^2 + 3n - 5$
3. $a_n = \sqrt{n^4 + 2n^3}$
4. $a_n = \sqrt{n^4 - 5n^3}$

II^{Gy} . Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges konvergens sorozat. Igazoljuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

1. a $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - \lim a| < \varepsilon\}$ halmaz végtelen;
2. a $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - \lim a| > \varepsilon\}$ halmaz véges.

III^A . Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}$ | 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 6}{3n^2 - 1}$ | 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!(5+2n)}$ |
| 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$ | 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + 3\sqrt{n} - 9)$ | 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 10n - 2}{5n^3 + 2n^2 + n + 1}$ |

IV^A . Legyen $k, l \in \mathbb{N}$ és legyen $(a_i)_{i \in k+1}$ és $(b_j)_{j \in l+1}$ valós számok egy rendszere. Keressük meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0}$$

határértékét.

V^A . Keressük meg az alábbi gyökös kifejezések határértékét.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{2n^2 - n})$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^4 + n})$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 3} - \sqrt{n^2 + an + 1}) \quad (a \in \mathbb{R})$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^6 + n^5} - \sqrt[3]{n^6 - n^5})$

VI^A . Legyen $a_0, a_1 = 1$, és minden $n \in \mathbb{N} \setminus 2$ esetén legyen

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$a_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

teljesül.

2. Igazoljuk, hogy a

$$b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \quad n \mapsto \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

sorozat olyan Cauchy-sorozat, mely nem konvergens a $\mathbb{Q}$ számtestben.

VII^H. Másodrendű lineáris rekurzió. Legyenek $a, b, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ paraméterek, és minden $n \in \mathbb{N}$ számra legyen

$$x_{n+2} = ax_n + bx_{n+1}.$$

1. Igazoljuk, hogy ha $b^2 + 4a > 0$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$x_n = \left(x_0 + \frac{2x_1 - bx_0}{\sqrt{b^2 + 4a}} \right) \cdot \frac{(b + \sqrt{b^2 + 4a})^n}{2^{n+1}} + \left(x_0 - \frac{2x_1 - bx_0}{\sqrt{b^2 + 4a}} \right) \cdot \frac{(b - \sqrt{b^2 + 4a})^n}{2^{n+1}}$$

teljesül.

2. Igazoljuk, hogy ha $b^2 + 4a = 0$ és $b \neq 0$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$x_n = \left(x_0(1 - n) + \frac{2n}{b}x_1 \right) \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^n$$

teljesül.

3. Igazoljuk, hogy ha $b^2 + 4a < 0$ és $b \neq 0$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$x_n = (-a)^{\frac{n}{2}} \cdot \operatorname{sgn}(b)^n \cdot \left(x_0 \cos(n\varphi) + \frac{2x_1 - bx_0}{\sqrt{-b^2 - 4a}} \sin(n\varphi) \right)$$

teljesül, ahol $\varphi = \arctg \frac{\sqrt{-b^2 - 4a}}{b}$.