

9. Sorozatok

I^A . Határozzuk meg a következő határértékeket!

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2n}$ | 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n}$ |
| 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}$ | 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{n}$ |
| 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$ | 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 100}$ |
| 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - 100}$ | 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2 + 3}{4n^2 + n}}$ |
| 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n}$ | 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3 - 2n + 3}{n\sqrt{n} + 8}}$ |
| 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^2 5^n}{9n^3 + 10^n}$ | 12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n^2 + 1}{10^n n^3 + \sqrt{n}}$ |
| 13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n}{4^n}}{\frac{n^2}{5^n}}$ | 14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1 + 2^n}{n + 3^n}}$ |
| 15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 4^n}{5^n + 3n}}$ | 16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 3^n + n^3 4^n}{n^4 5^n}}$ |

II^A . Határozzuk meg az alábbi rekurzióval definiált sorozatok határértékét!

1. $a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n}, a_1 = 4$
2. $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}, a_1 = 1$ és $a_1 = 5$
3. $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, a_1 = 1$

III^A . Határozzuk meg a következő a sorozatok esetén $\limsup a$ és $\liminf a$ értékét!

- | | |
|---|--|
| 1. $a_n = \left(\cos n \frac{\pi}{2}\right) \frac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 8}$ | 3. $a_n = \sqrt{\frac{n^3 + (-1)^n n^3}{3n^3 + n + 8}}$ |
| 2. $a_n = \frac{4 - n^2}{n + 3}$ | 4. $a_n = \left(\frac{3 - n}{5 + n}\right) \left(\frac{4n - 1}{2n + 5}\right)^3$ |

IV^A . Mutassuk meg, hogy minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatra teljesülnek az alábbiak.

1. Az $x \in \mathbb{R}$ számra pontosan akkor teljesül, hogy $\limsup a = x$, ha minden $c < x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} \mid c < a_n\}$ halmaz végtelen, és minden $c > x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} \mid c < a_n\}$ halmaz véges.
2. Az $x \in \mathbb{R}$ számra pontosan akkor teljesül, hogy $\liminf a = x$, ha minden $c < x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} \mid c > a_n\}$ halmaz véges, és minden $c > x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} \mid c > a_n\}$ halmaz végtelen.

V^{Gy} . Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{m+n} \leq a_m a_n$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}.$$

VI^{Gy} . Igazoljuk a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2 + \sqrt{3})^n \right\} = 1$$

határértéket, ahol $\{\cdot\}$ a törtész függvényt jelöli!

VII^{Gy} . Igazoljuk az alábbi határértékeket.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{3n}{n}} = \frac{27}{4}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{n}} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$