

10. Harmonikus és geometriai sorok

I^A . Igazoljuk a sorokra vonatkozó alábbi összefüggéseket!

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1} = 1 & 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 + 2n} = 3 \\
 3. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^3 - n} = 1 & 4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = 1 \\
 5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 & 6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}} = 1 \\
 7. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = -\log 2 & 8. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctg n - \arctg(n+1) = -\frac{\pi}{4}
 \end{array}$$

II^A . A majoráns, illetve minoráns kritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergenssek, illetve melyek divergenssek.

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2} & 2. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 8n^2 + 1} & 3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - n + 3}{2n^4 + 2n^2 + 7} \\
 4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 3}{2n^5 + 2n^2 + 7} & 5. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} & 6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 1} \right) \\
 7. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n} & 8. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} & 9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}
 \end{array}$$

III^A . Konvergens-e az alábbi sorok és ha igen, mi a határértékük?

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}} & 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}} & 3. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{2n} i} \\
 4. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{4^n(1-i)^{2n}} & 5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n & 6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 4^n + 5(-1)^n}{3^{2n}}
 \end{array}$$

IV^{Gy} . Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$ esetén

$$\begin{array}{l}
 1. \quad \sum_{k=0}^{n-1} kx^k = \frac{x^n}{x-1}n - \frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}, \text{ valamint } \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(x-1)^2}; \\
 2. \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^2x^k = \frac{x^n}{x-1}n^2 - \frac{2x^{n+1}}{(x-1)^2}n + \frac{x(1+x)(x^n-1)}{(x-1)^3}, \text{ valamint } \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}.
 \end{array}$$