11. Konvergenciakritériumok

I[A] . A gyökkritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5 4^{n+1}}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n n}$

II[A] . A hányadoskritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{(n-1)!}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{5^{3n} n!(n+1)!(n+2)!}$

III[A] . A Leibniz-kritérium segítségével vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek illetve feltételesen konvergensek-e.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\sqrt{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}$

IV[A] . Becsüljük meg, hogy hányadik részletösszeg esetén lesz a sor összegére kapott becslés hibája 10^{-4}-nél kisebb!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2}{5^{2n}+3n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n+3}$$

V[A] . Abszolút- vagy feltételesen konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n+n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4-n}{4+n}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2+n3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt[3]{n^2+1}}$$

VI[Gy] . Igazoljuk, hogy a $\displaystyle\sum_{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sor konverges, de önmagával vett Cauchy-szorzata már divergens.

VII$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim a$$

teljesül.

VIII$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat, és legyen $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan, hogy $|q| = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum\limits_{n} a_n q^n$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \right| \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \frac{2}{|1-q|}$$

teljesül.