12. Hatványsorok

I$^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk az alábbi határértékeket.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n+3} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^n = \sqrt[5]{\mathrm{e}}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^n = 0$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = 0$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)^{2n+1} = \mathrm{e}^{10}$

9*. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1) = 1$

10**. $\lim\limits_{n\to\infty} n(n(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1)-1) = \frac{1}{2}$

II$^{\mathrm{A}}$. Konvergencia-kritériumok segítségével döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+n)^n}{(n+1)!}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n-3}{2n^2-7n+10}\right)^{\frac{1}{n}}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2}\frac{1}{3^{2n+1}}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n}{\left(4+\frac{5}{n}\right)^n}$

III$^{\mathrm{A}}$. Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergencia sugarát és adjuk meg a konvergenciatartományát!

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{n+1}x^n$
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}x^{2n}$
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$
7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!}(x+7)^n$
8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{9^n}(x-2)^{2n}$
9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n+1}x^n$

IV$^{\mathrm{A}}$. Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergencia sugarát és ahol lehet, adjuk meg a konvergenciatartományt!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+4)^n}{n^2 3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{9^n}(x-2)^{2n}$$

V$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a, \alpha, x \in \mathbb{R}^+$ paraméterek mellett

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{x}{n^\alpha}\right)^n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad a<1; \\ \infty, & \text{ha} \quad (a>1) \ \vee \ (a=1 \ \wedge \ \alpha<1); \\ 1, & \text{ha} \quad a=1 \ \wedge \ \alpha>1; \\ \mathrm{e}^x, & \text{ha} \quad a=\alpha=1. \end{cases}$$

VI$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat, és legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\cos x \neq 1$. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n a_n \sin(nx)$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right)$$

teljesül.

VII$^{\mathrm{H}}$. Legyen $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat melyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k = 0.$$