

13. Határérték és folytonosság

I^A . Igazoljuk az alábbi határértékeket!

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+1} = 3$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x - 1) = -3$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x+1} = -\frac{1}{2}$
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2$
5. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+2}{(x+3)^2} = -\infty$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - 4x^3) = -\infty$

II^A . Keressük meg az alábbi határértékeket (ahol $n \in \mathbb{Z}$)!

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{(x^2 - 4)^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x - 10}{(x^2 - 4)^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (7x^9 - x^4 + 3x^2 + 1)$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 3})$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{9+x} - 3}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x^2+1} - 2x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{e^{4x} - 1}$

III^A . Igazoljuk, hogy az $\operatorname{id}_{\mathbb{R}} \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$ függvény csak a 0 pontban folytonos.

IV^A . Legyen $A = [-1, 0] \cup (]0, 1[\cap \mathbb{Q}) \cup \{3, 4, 5\}$ és legyen

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 2 \text{ és } x \notin \mathbb{Q}, \\ x & \text{ha } x < 2 \text{ és } x \in \mathbb{Q}, \\ 5 & \text{ha } x = 3, \\ 8 & \text{ha } x = 4 \text{ vagy } x = 5. \end{cases}$$

Mely pontokban folytonos az f függvény?

V^{Gy} . Mutassuk meg, hogy ha az $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos a 0 pontban, és minden $x \in]-1, 1[$ esetén $f(x) = f(x^2)$, akkor az f függvény folytonos.

VI^{Gy} . Függvény konvexitása és folytonossága.

1. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény az I intervallumon. Mutassuk meg, hogy ekkor az f függvény folytonos.
2. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Igazoljuk, hogy az f függvény pontosan akkor konvex, ha minden $x_1, x_2 \in I$ számra

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

teljesül.

VII^H . Adott $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ esetén legyenek $p_x \in \mathbb{Z}$ és $q_x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ azon egyértelműen meghatározott számok, melyekre $x = \frac{p_x}{q_x}$, valamint p_x és q_x relatív prímek. Az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{q_x}, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \end{cases}$$

függvényt *Dirichlet-függvénynek* nevezzük. Igazoljuk, hogy a f Dirichlet-függvénynek

1. minden pontban létezik jobb- illetve bal oldali határértéke;
2. a 0 helyen és minden irracionális pontban folytonos;
3. minden $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ pontban szakadása van, úgy, hogy $\lim_{a+} f = \lim_{a-} f$.