

14. A folytonosság következményei

I^A . Bolzano-tétel következményei.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokszámú polinomnak van zérushelye.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, és $\text{Ran } f = [a, b]$, akkor létezik olyan $x_0 \in [a, b]$, amelyre $f(x_0) = x_0$.
3. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, melyre $x_0 \sin x_0 = \frac{\pi}{4}$.
4. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $(x_i)_{i=1, \dots, n} \in I^n$ és $f \in C(I, \mathbb{R})$. Igazoljuk, hogy létezik olyan $x_0 \in I$ pont, melyre

$$f(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

teljesül.

5. Legyen $f \in C([0, 2], \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $u, v \in [0, 2]$, melyre

$$v - u = 1 \quad \text{és} \quad f(v) - f(u) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

II^A . Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \frac{1}{x}$, a $g(x) = x^2$ és a $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény a $]0, 1]$, $[1, 2]$ és a $]0, \infty[$ intervallumon?

III^{Gy} . Bizonyítsuk be, hogy a $\sin$ és a $\cos$ függvény egyenletesen folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon, valamint az $\frac{1}{\text{id}_{\mathbb{R}}}$ és a $\sin \frac{1}{\text{id}_{\mathbb{R}}}$ függvény nem egyenletesen folytonos a $]0, 1[$ intervallumon.

IV^A . Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f \in C([a, \infty[, \mathbb{R})$ olyan függvény, melyre $\lim_{\infty} f \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ekkor f egyenletesen folytonos az egész $[a, \infty[$ halmazon.

V^A . Számoljuk ki az alábbi határértékeket, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - \cos(bx) - \sin(bx)}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ch}(ax) + \cos(ax) - 2}{x^4}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(ax) + \sin(ax) - 2ax}{x^5}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - \cos(ax) - \sin(ax)}{x(e^{bx} - \cos(bx))}$