

15. Differenciálhatóság

I^A . Deriváljuk a következő függvényeket és hozzuk egyszerűbb alakra a deriváltakat!

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $f(x) = \frac{x^2 - x}{5}$ | 7. $f(x) = \sin^4 3x^2$ | 13. $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$ |
| 2. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} \sqrt[3]{x}}$ | 8. $f(x) = \sin \ln x$ | 14. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ |
| 3. $f(x) = \sqrt[4]{3x - 2x^2}$ | 9. $f(x) = \ln \sqrt{\cos x}$ | 15. $f(x) = (ax + b)^{cx+d}$ |
| 4. $f(x) = e^x(1 + x^2)$ | 10. $f(x) = \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$ | 16. $f(x) = \ln \sin \cos x^2$ |
| 5. $f(x) = \frac{\sin x}{x + \cos x}$ | 11. $f(x) = \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$ | 17. $f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$ |
| 6. $f(x) = \sin^3 x$ | 12. $f(x) = \frac{\sin x}{x} \operatorname{arctg} x$ | 18. $f(x) = \frac{\sin(x) \ln(1 + \cos^2 x^3)}{x}$ |

II^A . Keressük meg az $f = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$ és a $g = \sqrt[5]{\operatorname{id}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{id}_{\mathbb{R}}^3)}$ függvény deriváltját.

III^A . Tegyük folytonossá az alábbi függvényeket a 0 pontban, és számoljuk ki a deriváltjukat.

- | | |
|--|---|
| 1. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ | $x \mapsto x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ |
| 2. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ | $x \mapsto \begin{cases} \frac{\arcsin 2x}{\sin x} + c, & \text{ha } x < 0, \\ x^2 \log x, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$ |

IV^{Gy} . Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény minden pontban differenciálható, azonban az f' függvény nem folytonos.

V^H . Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, mely folytonos a 0 pontban és valamely $a \in]0, 1[$ számra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(ax)}{x} = \alpha$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor f differenciálható a 0 pontban, továbbá $f'(0) = \frac{\alpha}{1-a}$. Mutassuk meg, hogy a fenti következtetés tetszőleges $a \in]1, \infty[$ paraméter esetén is igaz marad.

VI^H . Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan mindenhol differenciálható függvény, melynek a deriváltja folytonos. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ paraméter esetén definiáljuk a

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto x_n = \begin{cases} a, & \text{ha } n = 0, \\ f(x_{n-1}), & \text{ha } n > 0 \end{cases}$$

sorozatot. Tegyük fel, hogy a $\operatorname{Ran} x$ halmaz szármassága végtelen, valamint létezik a $\lim_{\infty} x = A$ határérték. Mutassuk meg, hogy ekkor $|f'(A)| \leq 1$ teljesül.