

## 16. Differenciálhatóság következményei

I<sup>A</sup> . Elemi egyenlőtlenségek származtatása a középérték tételekből.

1. Igazoljuk, hogy minden  $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  számra  $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$  teljesül.
2. Igazoljuk, hogy minden  $a, b \in \mathbb{R}^+$  paraméterre, az  $a < b$  esetben  $\frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b - a} < \frac{1}{a}$  teljesül.
3. Igazoljuk, hogy tetszőleges  $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$  számra  $\frac{b - a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b - a}{\cos^2 b}$  teljesül.

II<sup>A</sup> . Legyen  $I \subseteq \mathbb{R}$  nyílt intervallum, és legyen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan differenciálható függvény, melynek a deriváltja korlátos. Igazoljuk, hogy ekkor  $f$  egyenletesen folytonos az egész  $I$  intervallumon.

III<sup>Gy</sup> . Mutassuk meg, hogy ha  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f, g \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  akkor  $fg \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  valamint

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

teljesül.

IV<sup>A</sup> . Adjuk meg az alábbi  $f(x)$  függvények  $x_0$  pontbeli érintőjének az egyenletét.

- |                                           |                                                            |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 \quad x_0 = 4$             | 3. $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2} \quad x_0 = \frac{1}{2}$ |
| 2. $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad x_0 = 2$ | 4. $f(x) = \sin x^2 \quad x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$      |

V<sup>A</sup> . Számoljuk ki a következő határértékeket!

- |                                                                                                |                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{e^{2x}}$                                           | 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right)$                                                    |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x \sin 2x}$                                       | 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^x$                                                |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$                                                    |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$                                                               | 10. $\lim_{x \rightarrow +0} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$                                                   |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\sin x})^{\operatorname{ctg} \pi x}$                        | 11. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} 3x)^{\frac{1}{x^2}}$                                                              |
| 6. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^3 \ln x^5$                                                       | 12*. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin \left( (2 - \operatorname{ch} x)^{\sin x} \right) - \frac{\pi}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}$ |

VI<sup>H</sup> . Feladatok a határérték és deriválás kapcsolatáról.

1. Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan páratlan függvény, melyre  $0 \in \text{Dom}(f''')$  teljesül, és legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ . Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(at)}{at^3} - \frac{f(bt)}{bt^3} \right) = \frac{a^2 - b^2}{6} f'''(0).$$

2. Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  háromszor differenciálható függvény, és legyen  $u \in \text{Dom}(f''')$  tetszőleges pont. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u+t) - f(u-t) - 2tf'(u)}{t^3} = \frac{f'''(u)}{3}.$$