

17. Magasabbrendű deriváltak

I^A . Példák a Jensen-egyenlőtlenségre.

1. Igazoljuk, hogy minden $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ számra, az $X = \sum_{i=1}^n x_i$ és $A = \sum_{i=1}^n a_i$ jelölések mellett

$$X \log \frac{X}{A} \leq \sum_{i=1}^n x_i \log \frac{x_i}{a_i}$$

teljesül. (Segítség: Tekintsük az $\text{id}_{\mathbb{R}} \cdot \log$ függvényt.)

2. Igazoljuk, hogy minden $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ és $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^+$ számra, az $A = \sum_{i=1}^n a_i$ jelölés mellett

$$\sqrt[A]{\prod_{i=1}^n x_i^{a_i}} + \sqrt[A]{\prod_{i=1}^n y_i^{a_i}} \leq \sqrt[A]{\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)^{a_i}}$$

teljesül. (Segítség: Tekintsük a $\log(1 + \exp)$ függvényt.)

II^{Gy} . Függvények konvexitása.

- Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény. Mutassuk meg, hogy ha létezik olyan $c \in]a, b[$ szám melyre $f(a) = f(c) = f(b)$, akkor az f függvény állandó.
- Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan konvex függvény, melyre g monoton növekvő és $\text{Dom}(g \circ f)$ intervallum. Mutassuk meg, hogy ekkor a $g \circ f$ függvény is konvex.
- Legyen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, továbbá legyen $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^{-1})$. Bizonyítsuk be, hogy az $\text{id}_{\mathbb{R}^+} \circ f$ függvény pontosan akkor konvex, ha a g függvény konvex. (Igaz marad-e az állítás, ha f nem kétszer differenciálható?)
- Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ kétszer differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy a $\log \circ f$ függvény pontosan akkor konvex, ha $f \cdot f'' \geq (f')^2$.

III^A . Határozzuk meg az alábbi függvények 0 körüli Taylor-sorát és annak konvergenciaterületét.

$$f(x) = (4x + 2)e^{-3x} \quad g(x) = \sin^2(3x) \quad h(x) = \frac{7 - 5x}{x^2 - 3x + 2}$$

IV^H . Legyen $f \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ olyan függvény, melyre f és f'' korlátos. Igazoljuk, hogy ekkor f' is korlátos valamint ha $k \in \{0, 1, 2\}$ esetén $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f^{(k)}(x)|$, akkor $M_1^2 \leq 4M_0M_2$ teljesül.

V^A . Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergenssek (ahol $x \in \mathbb{R}$).

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{e} - 1)^e \quad 2. \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{k}\right) \quad 3. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k}\right)$$

VI^{Gy} . Legyen $a, b \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[x]{\frac{a^x + b^x}{2}} = \sqrt{ab} \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$