

18. Szélsőérték számítás és függvényvizsgálat

I^A . Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x^3 e^{-x}$ és a $g(x) = x - 2 \arctg \frac{x}{1+x}$ függvényen.

Teljes függvényvizsgálatnál válaszoljunk az alábbi kérdésekre: hol értelmezett a függvény, mi a határértéke a plusz- és mínusz végtelenben, illetve a $\text{Dom } f$ halmaz határpontjaiban, mi a lineáris aszimptotája a plusz- és mínusz végtelenben, hol monoton növekvő illetve csökkenő a függvény, hol van lokális szélsőértéke, és a milyen jellegű szélsőérték (maximum, minimum), hol konvex illetve konkáv a függvény, hol van inflexiós pontja, hol van globális minimuma illetve maximuma a függvénynek, mi a függvény értékkészlete.

II^A . A binomiális sorfejtés segítségével írjuk fel az $\arctg$, $\arcsin$, $\sqrt{1 + \text{id}_{\mathbb{R}}}$, $\sqrt[3]{1 + \text{id}_{\mathbb{R}}^2}$ függvény 0 körüli 9-ed rendű Taylor-polinomját.

III^A . Határozzuk meg $\sqrt[3]{10}$ értékét 0,01 pontossággal.

IV^A . Van-e minimuma illetve maximuma az $f(x) = x^2 e^{-3x}$ függvénynek a $[0, 1]$ intervallumon, ha igen, határozzuk meg a szélsőértékeket.

V^A . Szélsőérték feladatok.

1. Legyen $T \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk területe. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk kerülete minimális?
2. Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk kerülete. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk területe a legnagyobb?
3. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú henger adatait!
4. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúp adatait!
5. Határozzuk meg a $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, felül nyitott, legkisebb felszínű henger adatait!
6. Adott $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, négyzet alapú tartályt akarunk készíteni a legkevesebb anyagból. Mekkora legyenek az élek, ha a tartály felül nyitott?

VI^H . Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ és legyen $x_0 \in I$ olyan pont, melyre $f''(x_0) \neq 0$. Igazoljuk, hogy ekkor az f függvényt az x_0 pontban legjobban közelítő kör egyenlete

$$y : [x_c - R, x_c + R] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto y_c - \text{sgn}(f''(x_0)) \cdot \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2},$$

ahol

$$R = \frac{(1 + f'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}, \quad x_c = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)} \quad \text{és} \quad y_c = f(x_0) + \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}.$$

VII^H . Mutassuk meg, hogy a

$$j : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \quad f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$$

leképezés injektív. Ezek alapján igazoljuk az alábbiakat.

$$|\mathbb{R}| \leq |C(\mathbb{R}, \mathbb{R})| \leq |\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})| = |\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})| = |\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))| = |\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\}))| = |\mathcal{F}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{0, 1\})| = |\mathbb{R}|$$

(Vagyis a folytonos függvények halmaza kontinuum számosságú.)