

21. Határozott integrál

I^A . Keressünk hibát az alábbi számításban.

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \, dx = \log x \cdot \frac{1}{\log x} - \int \log x \cdot \frac{-1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} \, dx = 1 + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \, dx$$

$$0 = 1$$

II^{Gy} . Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

$$\begin{array}{lll} 1. \quad \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} & 2. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1 & 3. \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{3} \\ 4. \quad \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \ln 2 & 5. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \, dx = \frac{1}{2} & 6. \quad \int_0^1 (1-2x)^{19} \, dx = 0 \\ 7. \quad \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \, dx = \frac{1}{6} & 8. \quad \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \, dx = 1 + \ln \frac{2}{1+e} & 9. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} \, dx = 1 \end{array}$$

III^A . Legyen $f \in \mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$ és mutassuk meg, hogy ekkor

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) \cos x \, dx = 0$$

teljesül.

IV^H . Számoljuk ki az

$$\int_0^{\pi} \log \sin x \, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx$$

integrálok értékét.

V^A . Igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{ak}{n}\right)} = \frac{(1+a)^{1+\frac{1}{a}}}{e}$$

teljesül.

VI^A . Legyen $f \in \mathcal{R}([0, 1], \mathbb{R})$ olyan függvény, melyhez létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in [0, 1]$ esetén $f(x) \geq c$ teljesül. Keressük meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

határértéket.

VII^A . Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ teljesül.

VIII^{Gy} . Határozzuk meg a következő függvények deriváltját!

$$1. \quad E(x) = \int_0^{4x} \sqrt{1+t^8} \, dt$$

$$2. \quad F(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt$$

$$3. \quad G(x) = \int_0^{4x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt$$

$$4. \quad H(x) = \int_x^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt$$

IX^A . Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) \, dt}{x^2}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} \, dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} \, dt}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} \, dt}{x^3}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{arctg} 3t \, dt}{x^2}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} \, dt}{\frac{1}{x}}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \, dt}{\sqrt{x^2+1}}$$