22. Improprius integrál

I$^{\text{A}}$. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ paraméter.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4} \,\mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx) \,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2^x-1} \,\mathrm{d}\,x$
5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2} \,\mathrm{d}\,x$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+x+1} \,\mathrm{d}\,x$
7. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \,\mathrm{d}\,x$
8. $\displaystyle\int_0^1 \log x \,\mathrm{d}\,x$

II$^{\text{A}}$. Számoljuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \text{és a} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

határértéket.

III$^{\text{A}}$. Konvergensek-e az alábbi integrálok?

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin 2x} \,\mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin 2\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos x \,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \,\mathrm{d}\,x$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{1-x})^3} \,\mathrm{d}\,x$
6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos^2(x^5+3)}{x^4+3x^2+5} \,\mathrm{d}\,x$
7. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sin^2 x} \,\mathrm{d}\,x$
8. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}-\sin^2 x} \,\mathrm{d}\,x$
9. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{2x^2+\sin x} \,\mathrm{d}\,x$
10. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{x+x^3}} \,\mathrm{d}\,x$
11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2x}(1+\sqrt{x})^3} \,\mathrm{d}\,x$
12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} \,\mathrm{d}\,x$

IV$^{\text{Gy}}$. Igazoljuk, hogy minden $x \in\,]-1, 1[$ számra

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)} = 1 + \frac{(1-x)\log(1-x)}{x} \;.$$

V^{H} . Legyen $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ olyan függvény, melyre $\lim\limits_{\infty} f = a$ és $\lim\limits_{-\infty} f = b$ teljesül. Számoljuk ki a

$$\lim_{z \to \infty} \int_{-z}^{z} (f(x+1) - f(x))\, \mathrm{d}\, x$$

határértéket.

VI^{H} . Legyen $f \in C([0, \infty[\,, \mathbb{R}^{+})$.

1. Igazoljuk, hogy ha f monoton csökkenő és $\displaystyle\int_0^{\infty} f < \infty$, akkor $\lim\limits_{x \to \infty} x f(x) = 0$.
2. Mutassuk meg, hogy ha $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[x]{f(x)} \in \,]0, 1[$, akkor $\displaystyle\int_0^{\infty} f < \infty$.

$\mathrm{VII}^{\mathrm{H}}$. Legyen $f \in \mathbb{R}([0, \infty[\,, \mathbb{R}^{+})$.

1. Igazoljuk, hogy ha $\displaystyle\int_0^{\infty} f < \infty$, akkor létezik olyan $g : [0, \infty[\, \to \mathbb{R}^{+}$ függvény, melyre $\lim\limits_{\infty} g = \infty$ és $\displaystyle\int_0^{\infty} f g < \infty$.
2. Igazoljuk, hogy ha $\displaystyle\int_0^{\infty} f = \infty$, akkor létezik olyan $g : [0, \infty[\, \to \mathbb{R}^{+}$ függvény, melyre $\lim\limits_{\infty} g = 0$ és $\displaystyle\int_0^{\infty} f g = \infty$.