

Analízis 1.
1. pótzárthelyi dolgozat
 2013. 10. 17. 16.15-17.45

Név:
 Neptun kód:
 Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Σ:

1. Mutassa meg, hogy tetszőleges A, B és C halmazra (6 p.)

$$A \setminus B \subseteq C \iff A \subseteq B \cup C.$$

2. Legyen, A és B tetszőleges halmaz, $f : A \rightarrow B$ függvény és $E \subseteq A$ (4+4 p.)
 részhalmaz.

- a.) Mutassa meg, hogy $E \subseteq f^{-1}(f(E))$ teljesül.
 b.) Az $A = B = \mathbb{R}$ esetben adjon példát olyan $E \subseteq \mathbb{R}$ halmazra és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, melyre $E \neq f^{-1}(f(E))$.

3. Bizonyítsa be, hogy minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ számra $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$. (6 p.)

4. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Igazolja az alábbi ekvivalenciát. (7 p.)

$$\alpha < \beta \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R} : (\beta \leq \varepsilon \Rightarrow \alpha < \varepsilon)$$

5. Legyen $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$. A valós számok halmazában (8+5 p.)

- a.) határozza meg az A halmaz belső, torlódási, határ- és izolált pontjait;
 b.) kompakt-e az A halmaz? (Válaszát indokolja!)

6. A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán definiáljuk az alábbi relációt. (3×5 p.)

$$\simeq := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$$

(Vagyis az x és y szám pontosan akkor áll $x \simeq y$ relációban egymással, ha $x - y$ racionális szám.)

- a.) Mutassa meg, hogy $\simeq$ ekvivalenciareláció.
 b.) Adja meg a $\mathbb{R}/\simeq$ ekvivalenciaosztályt, vagyis azt az elemet az $\mathbb{R}/\simeq$ halmazban, melynek az 52 eleme.
 c.) Határozza meg az $\mathbb{R}/\simeq$ halmaz számosságát.