

Analízis 1.
2. zárthelyi dolgozat
 2013. 11. 04. 10.15-11.45

Név:
 Neptun kód:
 Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Σ:

1. Számolja ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 2}{3n^2 - 1} \right)^{n^2+4}$ határértéket. (6 p.)

2. Számolja ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n^3 + 1)^{\frac{2}{n^2+1}}$ határértéket. (6 p.)

3. Legyen (7 p.)

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \frac{4n^2 + 2n^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n}{n^2 + 7}.$$

Határozza meg $\liminf a$ és $\limsup a$ értékeit.

4. Adja meg a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k-2} + 4(-2)^{3k+1}}{10^k}$ sor összegét. (6 p.)

5. Mely (9+3 p.)

a.) valós;

b.) komplex

x számok esetén konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{6(n+1)10^n}$ sor?

6. Becsülje meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}n+10}$ sor összegét $\frac{1}{2000}$ -nél kisebb hibával. (10 p.)

7. Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{6^n \cdot (n!)^2}$ sor? (6 p.)

8. Kacor király megbízta udvari matematikusát, hogy szervezze meg a királyi udvarban esedékes tavaszi fűnyírást. A matematikus sorrendbe állítja a fűnyírásban legjelesebb legényeit a királlyságnak és azt találja, hogy az n -edik ($n \in \mathbb{N}^+$) legény egyedül épp n nap alatt végezne a munkával. Igaz-e, hogy ha ügyesen szervezi a munkát, akkor bármilyen rövid idő alatt tudnak végezni a fűnyírással? Mi a helyzet akkor, ha az n -edik ($n \in \mathbb{N}^+$) legény egyedül épp n^2 nap alatt végezne a munkával? (3+3 p.)

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 2}{3n^2 - 1} \right)^{n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2/3}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{-1/3}{n^2}\right)^{n^2}} \cdot \left(\frac{3 + \frac{2}{n^2}}{3 - \frac{1}{n^2}}\right)^4 = \frac{e^{\frac{2}{3}}}{e^{-\frac{1}{3}}} \cdot 1 = e$$

$$2. \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \leq & \left(\sqrt[n^2+1]{1}\right)^2 & \leq & \left(\sqrt[n^2+1]{4n^3+1}\right)^2 & \leq & \left(\sqrt[n]{4n^3+4n^3}\right)^2 = \left(\sqrt[n]{8}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^6 \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \leq & \boxed{1} & \leq & & \leq & 1 \end{array}$$

3. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{4n} = a_{4n+2} = \frac{4n^2 + n}{n^2 + 7}$, $a_{4n+1} = \frac{6n^2 + n}{n^2 + 7}$ és $a_{4n+3} = \frac{2n^2 + n}{n^2 + 7}$. Ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n+2} = 4$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n+1} = 6$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n+3} = 2$. Vagyis $\limsup a = 6$ és $\liminf a = 2$.

$$4. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k-2} + 4(-2)^{3k+1}}{10^k} = \frac{1}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^k - 8 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{5}\right)^k = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{10}} - 8 \frac{1}{1 - \frac{-4}{5}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{7} - 8 \frac{5}{9} = \frac{10}{63} - \frac{280}{63} = -\frac{30}{7}$$

5. Legyen $z = x - 1$ és $a_n = \frac{(-1)^n}{6(n+1)10^n}$. A $\sum_n a_n z^n$ hatványsor konvergenciasugara

$$R = \left(\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} = \left(\limsup_n \frac{1}{10 \sqrt[n]{6(n+1)}} \right)^{-1} = 10.$$

Vagyis a sor konvergens, ha $|z| < 10$ és divergens, ha $|z| > 10$.

a.) Ha $z = 10$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{6(n+1)}$ sor konvergens, ugyanis Leibniz-sor. Ha $z = -10$, akkor a

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6(n+1)}$ sor divergens, ugyanis $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6(n+1)} \geq \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ami divergens harmonikus sor. Vagyis az eredeti sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in]-9, 11]$.

b.) Ha $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ és $|z| = 10$, akkor $z = 10q'$, ahol $|q'| = 1$ és $q' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Bevezetve a $q = -q'$ jelölést

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{6(n+1)}$ adódik, ami konvergens Ábel-tétel értelmében, hiszen az $n \mapsto q^n$ sorozat korlátos

részletösszegű, az $n \mapsto \frac{1}{6(n+1)}$ sorozat pedig korlátos változású zérussorozat. Vagyis az eredeti sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in \mathbb{C}$ olyan szám, melyre $|x - 1| \leq 10$ és $x \neq -9$ teljesül.

6. Ha $a_n = \frac{1}{2^{2n+1}n + 10}$, akkor a $\sum_n (-1)^n a_n$ sor Leibniz-sor vagyis konvergens, és az első $N \in \mathbb{N}$ tag összege

és az S sorösszeg különbsége abszolút értékben legfeljebb a_{N+1} . Mivel az $N = 4$ esetben $a_N = \frac{1}{2^{2 \cdot 4 + 1} \cdot 4 + 10} = \frac{1}{2^9 \cdot 4 + 10} = \frac{1}{2058} < \frac{1}{2000}$, ezért a kért közelítés $s_3 = \frac{1}{10} - \frac{1}{2^3 + 10} + \frac{1}{2^5 + 10} - \frac{1}{2^7 + 10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{18} + \frac{1}{74} - \frac{1}{394}$.

7. Ha $a_n = \frac{(2n)!}{6^n \cdot (n!)^2}$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{6 \cdot 6^n \cdot (n!)^2 \cdot (n+1)^2} \cdot \frac{6^n \cdot (n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{6(n+1)^2} = \frac{4}{6} < 1$ határérték alapján a hányados kritérium értelmében a sor konvergens.

8. Tegyük fel, hogy az n -edik legény τ_n nap alatt végezne egyedül a fűnyírással. Az első $N \in \mathbb{N}^+$ legény közös munkával $T_N = \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau_n} \right)^{-1}$ nap alatt vágná le a fűvet. Vagyis a $\tau_n = n$ esetben a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a sor divergenciája miatt

bármilyen kicsi $0 < q$ időparaméterhez létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$, melyre $T_N = \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau_n} \right)^{-1} < q$ teljesül. Ha $\tau_n = n^2$,

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, legyen $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ekkor minden $N \in \mathbb{N}^+$ esetén $T_N \geq \frac{1}{A}$, vagyis ekkor nem csökkenthető tetszőlegesen rövidre a munka időtartama.