

Analízis 1.
3. zárthelyi dolgozat
2013. 12. 02. 10.15-11.45

Név:
Neptun kód:
Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ :

1. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. (5+6 p.)
a.) Írja fel az f függvény 0 pontbeli másodfokú Taylor-polinomját.
b.) Mutassa meg, hogy ha a $0 < x < 0,2$ értékekre az f függvényt a másodfokú Taylor-polinomjával közelítjük, akkor a közelítés hibája kisebb mint 10^{-3} .

2. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyhez (10 p.)
létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $a, x \in I$ esetén

$$|f(a) - f(x)| \leq C |a - x|^2$$

teljesül. Igazolja, hogy ekkor f függvény állandó.

3. Végezze el az (12 p.)

$$f(x) = \log(1+x^2) - 2 \operatorname{arctg}(x)$$

függvény vizsgálatát. (Vagyis nézze meg folytonosság, monotonitás és konvexitás szempontjából, számolja ki a $\lim_{\infty} f$ és a $\lim_{-\infty} f$ határértéket, és ábrázolja vázlatosan a függvényt.)

4. Számolja ki a $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\sin(x)} \sqrt{\cos(x)}$ határértéket. (10 p.)

5. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely (6 p.)
differenciálható az $]a, b[$ szakaszon. Bizonyítsa be, hogy ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$ szám, melyre

$$\sin f(b) - \sin f(a) = (b - a) f'(c) \cos f(c)$$

teljesül.

6. Legyen $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$. Írja fel az f függvény $x_0 = \frac{1}{4}$ (6 p.)
pontbeli érintőjének az egyenletét.

1. Az f függvény 0 pontbeli másodfokú Taylor-polinomja $T_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$. Mivel $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ és $f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, ezért $f'(0) = 0$ és $f''(0) = 1$. Vagyis $T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$.

Ha $x \in]0, \frac{1}{5}[$, akkor létezik olyan $c \in]0, \frac{1}{5}[$, melyre $f(x) = T_2(x) + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3$ teljesül, vagyis

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \sup_{x \in]0, \frac{1}{5}[} \left| \frac{f^{(3)}(c)}{3!} x^3 \right| \leq \frac{x^3}{6} \sup_{x \in]0, \frac{1}{5}[} \left| -3 \frac{c}{(1+c^2)^{\frac{5}{2}}} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} < \frac{1}{1000}.$$

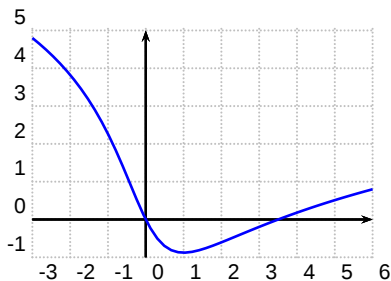
2. A feladat alapján $x \neq a$ esetén $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq C|x - a|$, amiből az $x \rightarrow a$ határértékkel $f'(a) = 0$ adódik. Tehát $f' = 0$ egy összefüggő nyílt halmazon, vagyis f állandó.

3. Az f mindenhol értelmezett, folytonos függvény, valamint $\lim_{\pm\infty} f = \infty$.

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{1+x^2} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ szigorúan monoton növekvő} & \text{ha } x \geq 1, \\ f \text{ szigorúan monoton csökkenő} & \text{ha } x \leq 1. \end{cases}$$

A monotonitásvizsgálat alapján az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az $x_0 = 1$ pontban, itt $f(x_0) = \log 2 - \frac{\pi}{2}$.

$$f''(x) = \frac{2(-x^2 + 2x + 1)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ konvex} & \text{ha } 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}, \\ f \text{ konkáv} & \text{ha } x \leq 1 - \sqrt{2} \text{ vagy } x \geq 1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 4. \lim_{x \rightarrow 0+0} (\cos x)^{\frac{1}{x \sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \exp \left(\frac{\log \cos x}{x \sin x} \right) \stackrel{\frac{0}{0} \text{ L'H}}{\text{exp folyt.}} = \exp \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \exp \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{-1}{\cos x}}{1 + \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x} = \frac{-1}{1 + 1 \cdot 1} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

5. A Lagrange-tételt alkalmazva a $\sin \circ f$ függvényre az $[a, b]$ intervallumon adódik az állítás.

6. Mivel $f(x_0) = \frac{\pi}{6}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ és $f(x_0) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, ezért az érintő egyenlete

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{\pi - \sqrt{3}}{6}.$$