

Vizsgatematika

Analízis 1, 2013/14 I. félév

A vizsga szóbeli, mindenki két tételt kap az alábbiakból; az elsőt részletesen kell ismertetni, a másodikból csak a definíciókat kell elmondani.

Nem kell tudni az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ halmazokon bevezetett műveletek tulajdonságainak a bizonyítását, valamint a számosságáritmetika alaptételének (mely szerint minden végtelen A halmazra $|A| = |A \times A|$ teljesül) a bizonyítását.

1. Halmazelméleti alapok. Elemi halmazelméleti jelek és műveletek ($\in$, $\subseteq$, $\cap$, $\cup$, $\setminus$) Rendezett párok. Relációk, ekvivalenciarelációk és függvények. (Reflexív, (anti)szimmetrikus, tranzitív relációk; reláció értelmezési tartománya, értékkészlete, inverze; relációk kompozíciója; ekvivalencia osztályok; injektív-, szürjektív- és bijektív függvények.) Cantor-tétel. Halmazrendszer fogalma. Kiválasztási axióma. Rendezés, infimum, szuprémum, legnagyobb/legkisebb elem, maximális/minimális elem. Lineáris rendezés, jólrendezés.

2. Számok és számosságok. Monoton halmaz, végtelenségi axióma, teljes indukció tétele. Természetes számok. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ konstrukciója. Rendezett test, teljesen rendezett test, arkhimédészi módon rendezett test. Halmazok összehasonlítása számosságuk alapján. Schröder–Bernstein-tétel. Véges, végtelen, megszámlálható és megszámlálhatóan végtelen halmaz. Kontinuum-hipotézis. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

3. A valós számok topológiája. Belső pont, határpont, torlódási pont, izolált pont. Nyílt, zárt, korlátos és kompakt halmaz. Halmaz belseje, halmaz lezártja. Cantor-féle közszerésztétel. Sűrű halmaz. Borel–Lebesgue-tétel valós számokra. Bernoulli-egyenlőtlenség. A vektortér fogalma és a skaláris szorzás fogalma. Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség

4. Sorozatok. A határérték és elemi tulajdonságai. Monoton, korlátos sorozat fogalma és tulajdonságai. Részsorozat. Torlódási pont jellemzése sorozatokkal. Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel. Bolzano–Weierstrass-tétel. $\liminf$, $\limsup$. Cauchy-sorozat, Cauchy-kritérium. Nevezetes határértékek: n^α , q^n , $\sqrt[n]{n}$, $(1 + \frac{x}{n})^n$.

5. Sorok. Sor konvergenciája, és elemi tulajdonságai. Cauchy-kritérium. Abszolút konvergencia. Majoráns/minoráns kritérium. Konvergencia-kritériumok: kondenzációs, gyök, hányados kritérium. Leibniz-sor. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok. Cauchy-szorzat. Mertens-tétel. Abel-féle kritérium.

6. Elemi függvények. Hatványsor definíciója, konvergencia sugara és az elemi Cauchy–Hadamard-tétel. Elemi függvények ($\exp$, $\sin$, $\cos$, sh , ch) definíciója. Az $\exp$ tulajdonságai. Euler-formula: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. A $\sin$, $\cos$ alaptulajdonságai.

7. Függvények főbb jellemzői és határértéke. Páros, páratlan, (szigorúan) monoton növekvő és csökkenő, konkáv és konvex, periodikus függvény. Jensen-egyenlőtlenség. Függvény

határértéke és a határérték elemi tulajdonságai. Átviteli elv határértékre. Bal és jobb oldali határérték, kapcsolatuk a határértékkel.

8. Valós-valós függvények folytonossága. Függvény folytonossága, folytonos függvények algebrát alkotnak, folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény. Átviteli elv folytonosságra. A folytonosság topologikus jellemzése. Kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt. Weierstrass-féle maximum-minimum elv. Bolzano-tétel. Egyenletes folytonosság, Heine-tétel.

9. Hatványsorok. A hatványsorként értelmezett függvények határértéke megegyezik a helyettesítési értékkel a konvergenciasugáron belül, és itt folytonos is a függvény. A π definíciója, és a trigonometrikus függvények periodicitása. A hatványsorként értelmezett függvényeket lehet tagonként deriválni a konvergenciasugáron belül.

10. A differenciálszámítás alapjai. A differenciálás fogalma, függvény deriváltja. A folytonosság kapcsolata a differenciálhatósággal. Differenciálható függvények algebrát alkotnak. Differenciálás alaptulajdonságai. Középértéktételek: Rolle, Lagrange, Cauchy. L'Hospital-szabály. n -szer és végtelenszer differenciálható függvények. Folytonosan differenciálható függvények.

11. A differenciálszámítás alkalmazása. Konvexitás/konkavitás kapcsolata a deriválással. Taylor-sorfejtés. Lokális szélsőérték fogalma és kapcsolata a függvény deriváltjával. Binomiális sorfejtés. Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség.

12. Határozatlan integrál. Határozatlan integrál fogalma és elemi határozatlan integrálok. Parciális és helyettesítéssel integrálás. Parciális törtekre bontás. Racionális függvények integrálása.

13. Határozott integrálás. Korlátos intervallumok hossza. Nulla mértékű halmazok fogalma és tulajdonságai. A Cantor-halmaz definíciója és néhány tulajdonsága. Intervallum felosztása. A felfelé irányított rendezés, az általánosított sorozat és konvergenciájának definíciója. Monoton, korlátos általánosított sorozatok és tulajdonságai. Alsó és felső közelítő összeg. Korlátos függvény alsó és felső integrálja. Riemann-integrálhatóság definíciója.

14. A Riemann-integrálhatóság kritériumai. Oszcillációs összeg. A Riemann-integrálható függvények algebrát alkotnak. Newton-Leibniz-tétel.