# 1. Integrálfüggvény és improprius integrál

$\mathrm{I}^{\mathrm{A}}$ . Határozzuk meg a következő függvények deriváltját!

1. $E(x) = \displaystyle\int_0^{4x} \sqrt{1+t^8}\,\mathrm{d}\,t$
2. $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}\,t$
3. $G(x) = \displaystyle\int_0^{4x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}\,t$
4. $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}\,t$

$\mathrm{II}^{\mathrm{A}}$ . Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}\,t}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,\mathrm{d}\,t}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}\,t}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}\,t}{x^3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{arctg} 3t\,\mathrm{d}\,t}{x^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t}{\frac{1}{x}}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,\mathrm{d}\,t}{\sqrt{x^2+1}}$

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$ . Számoljuk ki a következő improprius integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ paraméter.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2^x-1}\,\mathrm{d}\,x$
5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x$
7. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}\,x$
8. $\displaystyle\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}\,x$

$\mathrm{IV}^{\mathrm{A}}$ . Számoljuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \text{és a} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

határértéket.

$\mathrm{V}^{\mathrm{A}}$ . Konvergensek-e az alábbi integrálok?

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin 2x}\,\mathrm{d}\,x$
7. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin 2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}\,x$

4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}\,x$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{1-x})^3}\,\mathrm{d}\,x$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos^2(x^5+3)}{x^4+3x^2+5}\,\mathrm{d}\,x$

8. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}-\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$

9. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{2x^2+\sin x}\,\mathrm{d}\,x$

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{x+x^3}}\,\mathrm{d}\,x$

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2x}(1+\sqrt{x})^3}\,\mathrm{d}\,x$

12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}\,x$

VI$^{\mathrm{Gy}}$ . Igazoljuk, hogy minden $x \in\, ]-1,1[$ számra

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(k+1)} = 1+\frac{(1-x)\log(1-x)}{x}\ .$$

VII$^{\mathrm{H}}$ . Legyen $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ olyan függvény, melyre $\lim\limits_{\infty} f = a$ és $\lim\limits_{-\infty} f = b$ teljesül. Számoljuk ki a

$$\lim_{z\to\infty}\int_{-z}^{z}(f(x+1)-f(x))\,\mathrm{d}\,x$$

határértéket.

VIII$^{\mathrm{H}}$ . Legyen $f \in C([0,\infty[\,,\mathbb{R}^+)$.

1. Igazoljuk, hogy ha $f$ monoton csökkenő és $\displaystyle\int_0^\infty f<\infty$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=0$.
2. Mutassuk meg, hogy ha $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{f(x)} \in\, ]0,1[$, akkor $\displaystyle\int_0^\infty f<\infty$.

IX$^{\mathrm{H}}$ . Legyen $f \in \mathbb{R}([0,\infty[\,,\mathbb{R}^+)$.

1. Igazoljuk, hogy ha $\displaystyle\int_0^\infty f<\infty$, akkor létezik olyan $g : [0,\infty[\, \to \mathbb{R}^+$ függvény, melyre $\lim\limits_{\infty} g=\infty$ és $\displaystyle\int_0^\infty fg<\infty$.
2. Igazoljuk, hogy ha $\displaystyle\int_0^\infty f=\infty$, akkor létezik olyan $g : [0,\infty[\, \to \mathbb{R}^+$ függvény, melyre $\lim\limits_{\infty} g=0$ és $\displaystyle\int_0^\infty fg=\infty$.