2. Metrikus terek alapjai

I$^{\mathrm{A}}$. Legyen (M,d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Mutassuk meg, hogy az X halmaz pontosan akkor zárt, ha tartalmazza az összes torlódási pontját.

II$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen (M,d) metrikus tér és legyen $E_1,\dots,E_n \subseteq M$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\operatorname{Int}\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Int} E_k \quad \text{és} \quad \overline{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{E_k}.$$

III$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen (M,d) metrikus tér és legyen $(E_i)_{i\in I}$ a M részhalmazainak tetszőleges rendszere. Bizonyítsuk be a következőket.

1. $\operatorname{Int}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \operatorname{Int} E_i$
2. $\operatorname{Int}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \supseteq \bigcup_{i\in I} \operatorname{Int} E_i$
3. $\overline{\bigcap_{i\in I} E_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{E_i}$
4. $\overline{\bigcup_{i\in I} E_i} \supseteq \bigcup_{i\in I} \overline{E_i}$

IV$^{\mathrm{A}}$. Tekintsük az $(\mathbb{R}^2, d_2)$ metrikus térben az $X = (0\times\mathbb{R}) \cup (1\times\mathbb{R})$ alteret. Adjunk meg olyan x pontot és $r>0$ számot, melyre az $(X, d_2|_{X\times X})$ metrikus altérben

$$\overline{\{y\in X \mid d(x,y) < r\}} \neq \{y \in X \mid d(x,y) \le r\}$$

teljesül.

V$^{\mathrm{A}}$. Mutassunk példát olyan halmazra metrikus térben, mely korlátos és zárt, de nem kompakt.

VI$^{\mathrm{A}}$. Definiáljuk az alábbi leképezéseket.

$$\begin{aligned} d_1 &: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \\ d_2 &: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y| \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{R}, d_1)$ és $(\mathbb{R}, d_2)$ nem teljes metrikus terek.

VII$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen M egy nem üres halmaz és $d : M\times M \to \mathbb{R}_0^+$ egy olyan leképezés, melyre

1. minden $x,y\in M$ elemre $d(x,y)=0$ pontosan akkor teljesül, ha $x=y$;
2. minden $x,y,z\in M$ esetén $d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)$.

Igazoljuk, hogy (M,d) metrikus tér.

VIII$^{\mathrm{A}}$. Legyen (M,d) metrikus tér. Igazoljuk, hogy az alábbi $d_i : M\times M \to \mathbb{R}^+$ $(i=1,2,3,4)$ függvények is metrikát határoznak meg.

$$d_1(x,y) = \min(d(x,y),1) \quad d_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad d_3(x,y) = \log(d(x,y)+1) \quad d_4(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$$

IX$^{\mathrm{A}}$. Legyen (M,d) metrikus tér és legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ olyan függvény, melyre

1. $f(0) = 0$ és minden $x > 0$ esetén $f(x) > 0$;
2. f monoton növő;
3. minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Mutassuk meg, hogy ekkor $(M, f \circ d)$ is metrikus tér.

X$^{\mathrm{A}}$. Definiáljuk a

$$d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad (n, m) \mapsto \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n+m} & \text{ha} \quad m \neq n; \\ 0 & \text{ha} \quad m = n \end{cases}$$

függvényt.

1. Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{N}, d)$ metrikus tér.
2. Adjunk példát olyan $\mathbb{N}$ halmazban haladó $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatra és az $\mathbb{R}^+$ halmazban haladó $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton fogyó sorozatra, melyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $r_k > 1$, $\overline{B}_{r_{k+1}}(n_{k+1}) \subseteq \overline{B}_{r_k}(n_k)$, de $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}_{r_k}(n_k) = \emptyset$.

XI$^{\mathrm{H}}$. Legyen (M, d) olyan metrikus tér, melyben M korlátos halmaz. Jelölje $F(M)$ az M tér nem üres zárt részhalmazinak a halmazát. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\begin{aligned} \rho : F(M) \times F(M) \to \mathbb{R}^+ &\qquad (A, B) \mapsto \sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} d(x, y) \right) \\ d' : F(M) \times F(M) \to \mathbb{R}^+ &\qquad (A, B) \mapsto \max(\rho(A, B), \rho(B, A)) \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy $(F(M), d')$ metrikus tér.

XII$^{\mathrm{H}}$. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \times \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \to \mathbb{R}^+ &\qquad (f, g) \mapsto \min \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\} \\ d : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \times \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \to \mathbb{R}^+ &\qquad (f, g) \mapsto \begin{cases} \dfrac{2 + \alpha(f, g)}{1 + \alpha(f, g)} & \text{ha} \quad f \neq g; \\ 0 & \text{ha} \quad f = g. \end{cases} \end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), d)$ metrikus tér.

XIII$^{\mathrm{H}}$. Legyen (M, d) metrikus tér és tetszőleges $A \subseteq M$ halmaz esetén legyen

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} A &= \left\{ x \in M \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq A \right\}, \\ \operatorname{Ext} A &= \left\{ x \in M \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap A = \emptyset \right\}, \\ \operatorname{Fr} A &= \left\{ x \in M \mid \forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \setminus A \neq \emptyset \right\}. \end{aligned}$$

1. Mutassuk meg, hogy minden $A \subseteq M$ esetén teljesülnek az alábbiak.

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext} A = \operatorname{Ext}\operatorname{Ext} A & \qquad \operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Int} A = \operatorname{Ext}\operatorname{Int} A \\ \operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Int}\operatorname{Fr} A = \operatorname{Int}\operatorname{Fr} A & \qquad \operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Fr} A = \operatorname{Int}\operatorname{Fr} A \\ \operatorname{Fr}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Int} A = \operatorname{Fr}\operatorname{Ext}\operatorname{Int} A & \qquad \operatorname{Fr}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext} A = \operatorname{Fr}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext} A \\ \operatorname{Fr}\operatorname{Ext}\operatorname{Int}\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr}\operatorname{Int}\operatorname{Fr} A & \end{array}$$

2. Legyen $A \subseteq M$ tetszőleges halmaz. Mutassuk meg, hogy ha véges sokszor alkalmazzuk egymás után az Int, az Ext és a Fr halmazműveleteket az A halmazra, akkor azokat mindig le lehet rövidíteni négy halmazműveletre.
3. Legyen $A \subseteq M$ tetszőleges halmaz. Mutassuk meg, hogy ha véges sokszor alkalmazzuk egymás után az Int, az Ext és a Fr halmazműveleteket az A halmazra, akkor legfeljebb 25 különböző halmazt kaphatunk.