3. Metrikus terek tulajdonságai

I^{Gy}. Legyen (M,d) metrikus tér és legyen $x \in M$.

1. Mutassuk meg, hogy az $\{x\}$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha x nem izolált pontja az M térnek.
2. Mutassuk meg, hogy ha M nem üres, teljes metrikus tér, melynek nincs izolált pontja, akkor az M halmaz nem megszámlálhatóan végtelen.

II^{H}. Igazoljuk, hogy nincsen olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, mely csak a racionális pontokban folytonos.

<u>Útmutatás</u>: Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$. Definiáljuk f *ingadozás függvényét* a

$$\omega_f : M_1 \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \inf_{r \in \mathbb{R}^+} \operatorname{diam} f\left(B_r(x)\right)$$

képlettel, ahol adott $X \subseteq M_2$ halmaz esetén

$$\operatorname{diam}(X) = \begin{cases} \sup\left\{d(x,y) \mid x, y \in X\right\} & \text{ha} \quad X \neq \emptyset \\ 0 & \text{ha} \quad X = \emptyset. \end{cases}$$

az X halmaz *átmérője.*

1. Mutassuk meg, hogy az f függvény pontosan akkor folytonos az $a \in M_1$ pontban, ha $\omega_f(a) = 0$ teljesül.
2. Mutassuk meg, hogy minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $\overset{-1}{\omega}\left(]-\infty, c[\right)$ nyílt halmaz. (Vagyis minden $c \in \mathbb{R}$ számra az
$$\{a \in M_1 \mid \omega_f(a) < c\}$$
halmaz nyílt, amit azt jelenti, hogy az ω_f függvény *felülről félig folytonos.*)
3. Mutassuk meg, hogy a $\overset{-1}{\omega_f}(0)$ halmaz előáll megszámlálhatóan sok nyílt halmaz metszeteként. (Melyet úgy fejezünk ki, hogy $\overset{-1}{\omega_f}(0)$ G_δ *halmaz.*)
4. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}$ nem G_δ halmaz.

III. Példák lokális kompakt és nem lokálisan kompakt terekre.

1^{A}. Legyen $M = \mathbb{Q}$ és minden $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén legyen $d(p,q) = |p - q|$. Mutassuk meg, hogy az (M,d) tér nem lokálisan kompakt.

2^{Gy}. Legyen $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \ \wedge y = 0) \ \vee \ (x > 0)\right\}$ és legyen d az euklideszi metrika megszorítása az M halmazra. Mutassuk meg, hogy az (M,d) tér nem lokálisan kompakt.

3^{H}. Legyen $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \ \wedge y = 0) \ \vee \ \left(x > 0 \ \wedge \ y = \sin\dfrac{1}{x}\right)\right\}$ és legyen d az euklideszi metrika megszorítása az M halmazra. Mutassuk meg, hogy az (M,d) tér nem lokálisan kompakt.

IV^{A}. Tekintsük az $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ térben haladó $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$ sorozatokat, ahol minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n = \left(\frac{1}{n+1}, \sqrt[n]{n^2+1}, (\sqrt{2}-1)^n\right) \qquad \text{és} \qquad b_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}, \cos(n\pi), \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n\right).$$

Határozzuk meg a $\lim a$ és a $\lim b$ határértéket, ha létezik.

V^{A}. Legyen $M = [1, \infty[$ a megszokott (euklideszi) metrikával. Kontrakciók-e az alábbi $f : M \to M$ függvények?

1. Kontrakciók-e az $f : M \to M$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ függvény?
2. Kontrakciók-e az $f : M \to M$, $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x}$ függvény?
3. Igazoljuk, hogy ha $f : M \to M$ olyan függvény, mely folytonos és differenciálható az $]1,\infty[$ halmazon, valamint létezik olyan $K \in [0,1[$, melyre minden $x \in]1,\infty[$ esetén $|f'(x)| \leq K$ teljesül, akkor f kontrakció.

VI$^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy minden kompakt metrikus tér teljes.

VII. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Norma-e a $C^1([a,b], \mathbb{R})$ vektortéren a

1$^{\mathrm{A}}$. $\|f\|_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$;

2$^{\mathrm{A}}$. $\|f\|_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} (|f(x)| + |f'(x)|)$;

3$^{\mathrm{Gy}}$. $\|f\|_3 = |f(a)| + \displaystyle\int_a^b |f|$;

leképezések valamelyike?