4. Normált terek

I^{H} . Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Pontosan akkor létezik a V vektortéren olyan skaláris szorzás mellyel V prehilbert-tér, ha minden $x, y \in V$ vektorra

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

teljesül.

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy normált térben minden nyílt és zárt gömb konvex halmaz. (Vagyis minden $a \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\forall x, y \in B_r(a) \forall t \in [0,1]: \ tx + (1-t)y \in B_r(a)$$
$$\forall x, y \in \overline{B_r(a)} \forall t \in [0,1]: \ tx + (1-t)y \in \overline{B_r(a)}$$

teljesül.)

$\mathrm{III}^{\mathrm{H}}$. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $X \subseteq V$ konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy az $a \in X$ pont az X *halmaz extremális pontja*, ha

$$\forall x, y \in X \forall t \in [0,1]: \ tx + (1-t)y = a \quad \Longrightarrow \quad t \in \{0, 1\}.$$

1. Minden $p \in [1, \infty[$ esetén adjuk meg a $\overline{B_1(0)}$ halmaz extremális pontjait az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ térben.
2. Adjuk meg a $\overline{B_1(0)}$ halmaz extremális pontjait az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ térben.

3^{**}. Mutassuk meg, hogy a $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ térben a $\overline{B_1(0)}$ gömbnek nincsen extremális pontja, ahol $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ jelöli az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, kompakt tartójú függvények halmazát.

IV^{A} . Legyen az $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés mátrixa a kanonikus $(e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ bázisban

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Határozzuk $\|A\|$ értékét, ha
1. $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$;
2. $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$;
3. $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

V^{A} . Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $A \in \mathscr{L}^n(V, \mathbb{R})$. (Vagyis $A : V^n \to \mathbb{R}$ folytonos n-lineáris leképezés.)
1. Mutassuk meg, hogy ha A szimmetrikus negatív definit leképezés, akkor n páros szám.
2. Mutassuk meg, hogy ha A szimmetrikus pozitív definit leképezés, akkor n páros szám.
3. Mutassuk meg, hogy az $n > 1$ esetben ha A szimmetrikus és antiszimmetrikus, akkor $A = 0$.
4. Mutassuk meg, hogy az $n = 2$ esetben létezik olyan A_1 szimmetrikus és A_2 antiszimmetrikus operátor, melyre $A = A_1 + A_2$.

VI^{A} . Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $A \in \mathscr{L}^n(V, \mathbb{R})$.
1. Ha A szigorúan pozitív definit, akkor pozitív definit.
2. Ha A szigorúan negatív definit, akkor negatív definit.
3. Ha $\dim V < \infty$ és A pozitív definit, akkor szigorúan pozitív definit.
4. Ha $\dim V < \infty$ és A negatív definit, akkor szigorúan negatív definit.