4. Lineáris operátorok és egyenletes konvergencia

I$^{\mathrm{A}}$. Határozzuk meg az alábbi függvénysorozatok konvergenciatartományát és határfüggvényét.

1. $f_n(x) = \ln^n x$
2. $f_n(x) = n \sin \dfrac{x}{n}$
3. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$
4. $f_n(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

II$^{\mathrm{A}}$. Határozzuk meg az alábbi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ függvénysorozat $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvényét, valamint döntsük el, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál-e az f határfüggvényhez a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$
2. $f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$
3. $f_n(x) = \dfrac{2x^{2n}}{1+x^{4n}}$
4. $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{nx}-1}{\mathrm{e}^{nx}+1}$
5. $f_n(x) = n \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$
6. $f_n(x) = \dfrac{1}{(x+n)^2}$
7. $f_n(x) = \sin^n x$
8. $f_n(x) = n \sin \dfrac{x}{n}$
9. $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} nx$
10. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$
11. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$
12. $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}$

III$^{\mathrm{A}}$. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorozatok egyenletesen konvergensek-e az adott intervallumon.

1. $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ $\quad I_1 = [0,\infty[\quad I_2 = [a,\infty[$
2. $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}$ $\quad I = [0,\infty[$
3. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ $\quad I = [0,1[$

IV$^{\mathrm{A}}$. Határozzuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát.

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos nx}{n^4+x^2}$
5. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+x^{2n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^x}$

V$^{\mathrm{A}}$. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományon.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-nx}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}+n\pi\right)$

VI$^{\mathrm{A}}$. Tekintsük a

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixokat, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.
2. Írjuk fel a mátrixokat $S^{-1}DS$ alakban, ahol D diagonális mátrixot jelöl.
3. Határozzuk meg a mátrixok századik hatványát.
4. Számoljuk ki a mátrixok exponenciálisát.

VII$^{\mathrm{Gy}}$. Adjuk meg a következő mátrixok Jordan-alakját, valamint az eredeti bázist a mátrix kanonikus bázisába vivő leképezés mátrixát is!

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -6 \\ 4 & -1 & -3 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ezek alapján számoljuk ki az $f(A_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ mátrixokat, ahol $f(x) = x \sin x$.

5. Analízis 2, matematikusoknak, 2014.03.14., Andai Attila