6a. Egyenletes konvergencia és következményei

I[A] . Igazoljuk, hogy

1. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n9^n} x^n$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[-8, 9]$ halmazon;
2. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n9^n} x^{2n}$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[-3, 3]$ halmazon.

II[A] . Igazoljuk a függvénysorok deriváltjára kapott kifejezéseket!

$$1. \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4 + x^2}$$

$$2. \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\,\mathrm{e}^{-kx^2}\right) = -2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,\mathrm{e}^{-kx^2}$$

III[A] . Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{2^{n-1}} \quad \text{és} \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1-x}{k}}{k+1} \ .$$

Legyen $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ és $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. Határozzuk meg az $f'(0)$ és a $g'(1)$ értékét.

IV[Gy] . Határozzuk meg az alábbi határértékeket.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{arctg} n^5 x^2}{x + \sqrt{n}}\ \mathrm{d}\,x \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{nx}}\ \mathrm{d}\,x$$

[Gy] : Gyakorló feladat; [A] : Alapfeladat; [H] : Haladó feladat.