6b. Approximáció

I[A] . Legyen $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

1. $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^n \,\mathrm{d}\,x = 0$ teljesül, akkor $f = 0$;
2. $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^{\pi n} \,\mathrm{d}\,x = 0$ teljesül, akkor $f = 0$;
3. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{e}^{nx} \,\mathrm{d}\,x = 0$ teljesül, akkor $f = 0$.

II[Gy] . Legyen $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_0^1 f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

teljesül, akkor $f = 0$.

III[Gy] . Legyen $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\int_0^1 f(x)\left(x^{n+1}(1-x)^2\right)''\,\mathrm{d}\,x = 0$$

teljesül, akkor f lineáris.

IV[A] . Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.

1. Mutassuk meg, hogy minden $f \in C([a,b]\times[c,d],\mathbb{R})$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ paraméterhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, valamint minden $k = 1,\dots,n$ esetén léteznek olyan $\alpha_i \in C([a,b],\mathbb{R})$ és $\beta_i \in C([c,d],\mathbb{R})$ függvények, melyekre
$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k \right\|_{\sup} = \sup_{(x,y)\in[a,b]\times[c,d]} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)\beta_k(y) \right| < \varepsilon$$
teljesül.
2. Mutassuk meg, hogy minden $f \in C([a,b]\times[c,d],\mathbb{R})$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ paraméterhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, valamint minden $k = 1,\dots,n$ esetén léteznek olyan $\alpha_i, \beta_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomok, melyekre
$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k \right\|_{\sup} = \sup_{(x,y)\in[a,b]\times[c,d]} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)\beta_k(y) \right| < \varepsilon$$
teljesül.

V[H] . Legyen (M,d) és (M',d') kompakt metrikus tér. Mutassuk meg, hogy minden $f \in C(M\times M',\mathbb{R})$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ paraméterhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, valamint minden $k = 1,\dots,n$ esetén léteznek olyan $\alpha_i \in C(M,\mathbb{R})$ és $\beta_i \in C(M',\mathbb{R})$ függvények, melyekre

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k \right\|_{\sup} = \sup_{(x,y)\in T\times T'} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)\beta_k(y) \right| < \varepsilon$$

[Gy] : Gyakorló feladat; [A] : Alapfeladat; [H] : Haladó feladat.

teljesül.

VI[A] . Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, W a $C([a,b], \mathbb{R})$ tér konvex függvényeinek a részhalmaza, azaz $W = \{f \in C([a,b], \mathbb{R}) | \ f \text{ konvex}\}$, valamint legyen

$$A = W - W \qquad \Big(= \{f - g | \ f, g \in W\}\Big).$$

1. Mutassuk meg, hogy A lineáris altér.
2. Mutassuk meg, hogy minden $f, g \in W$ függvényre $\sup(f, g) \in W$ teljesül, ahol

$$\sup(f,g) : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sup(f(x), g(x)).$$

3. Legyen $f_1, f_2, g_1, g_2 \in W$. Mutassuk meg, hogy

$$\sup(f_1 - g_1, f_2 - g_2) = \sup(f_1 + g_2, f_2 + g_1) - (g_1 + g_2)$$

   teljesül; vagyis minden $h_1, h_2 \in A$ esetén $\sup(h_1, h_2) \in A$.
4. Mutassuk meg, hogy minden $f \in A$ függvény esetén $|f| \in A$ teljesül.
5. Mutassuk meg, hogy A sűrű a $(C([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.

VII[H] . Legyen

$$\{\cdot\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \min\{|x - n| \ | \ n \in \mathbb{Z}\},$$

valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{\{10^n x\}}{10^n},$$

továbbá legyen $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$, az f függvény folytonos, de egyetlen pontban sem differenciálható.

VIII[H] . Legyen $f_0 = \mathrm{id}_{[0,1]}$, vagyis $f_0 : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x$. Definiáljuk az

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} f_n(3x), & \text{ha} \quad x \in [0, 1/3[; \\ 1, & \text{ha} \quad x \in [1/3, 2/3[; \\ 1 + f_n(3x - 2), & \text{ha} \quad t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

rekurzióval az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatot.

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\|f_{n+1} - f_n\| \le \frac{1}{2} \|f_n - f_{n-1}\|$, valamint $\|f_1 - f_0\| = \frac{1}{6}$.
2. Igazoljuk, hogy létezik az $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ pontonkénti határfüggvény, és f folytonos.
3. Igazoljuk, hogy f monoton növő, majdnem mindenütt differenciálható, $f' = 0$ majdnem mindenütt, valamint $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$.
   (A fenti f függvényt nevezik *ördöglépcső függvénynek*.)

6. Analízis 2, matematikusoknak, 2014.03.21., Andai Attila

IX$^{\mathrm{H}}$. Minden $\gamma : [0,9] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ függvényre jelölje $T\gamma$ azt a $[0,9] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $t \in [0,9]$ esetén

$$(T\gamma)(t) = (1 - \gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

Iterációval értelmezzük azt a $[0,9] \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ függvényekből álló $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre $\gamma_0 : [0,9] \to \mathbb{R}\times\mathbb{R};\ t \mapsto (t,t)$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\gamma_{n+1} : [0,9] \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $t \in [0,9]$ esetén

$$\gamma_{n+1}(t) = \frac{1}{3} \cdot \begin{cases} \gamma_n(9t), & \text{ha} \quad t \in [0,1[\,; \\ (T\gamma_n)(9(t-1)) + (0,1), & \text{ha} \quad t \in [1,2[\,; \\ \gamma_n(9(t-2)) + (0,2), & \text{ha} \quad t \in [2,3[\,; \\ -(T\gamma_n)(9(t-3)) + (2,3), & \text{ha} \quad t \in [3,4[\,; \\ -\gamma_n(9(t-4)) + (2,2), & \text{ha} \quad t \in [4,5[\,; \\ -(T\gamma_n)(9(t-5)) + (2,1), & \text{ha} \quad t \in [5,6[\,; \\ \gamma_n(9(t-6)) + (2,0), & \text{ha} \quad t \in [6,7[\,; \\ (T\gamma_n)(9(t-7)) + (2,1), & \text{ha} \quad t \in [7,8[\,; \\ \gamma_n(9(t-8)) + (2,2), & \text{ha} \quad t \in [8,9]\,. \end{cases}$$

1. Rajzoljuk le a γ_1 és a γ_2 függvényt!
2. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén γ_n folytonos.
3. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Ran}(\gamma_n) \subseteq [0,1] \times [0,1]$ és $\operatorname{Ran}(\gamma_n) \subseteq \operatorname{Ran}(\gamma_{n+1})$.
4. Igazoljuk, hogy minden $k < 9$ és $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra, valamint $t \in \left[\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}\right]$ pontra
$$\|\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)\|_\infty = \frac{1}{3}\|\gamma_n(9t-k) - \gamma_{n-1}(9t-k)\|_\infty$$
teljesül.
5. Igazoljuk, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor
$$\sup_{t\in[0,1]} \|\gamma_m(t) - \gamma_n(t)\|_\infty \leq \frac{3/2}{3^{\min(m,n)}}.$$
6. Igazoljuk, hogy a $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $[0,1]$ intervallumon egyenletesen konvergens, valamint legyen $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$.
7. Igazoljuk, hogy a γ függvény olyan $[0,1] \times [0,1]$ halmazban haladó folytonos ív, melyre
$$\operatorname{Ran}(\gamma) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ran}(\gamma_n)},$$
és a
$$D = \left\{ \left(\frac{j}{3^m}, \frac{k}{3^m} \right) \mid j,k,m \in \mathbb{N},\ j,k \leq 3^m \right\}$$
halmaz része az $\operatorname{Ran}(\gamma)$ halmaznak, és sűrű a $[0,1] \times [0,1]$ halmazban.
8. Igazoljuk, hogy $\operatorname{Ran}(\gamma) = [0,1] \times [0,1]$.
9. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan folytonos $\gamma : [0,1] \to [0,1]^n$ függvény, melyre $\operatorname{Ran}(\gamma) = [0,1]^n$ teljesül.