7. Fourier-transzformáció

I. Cesáro-összegzés.

1^{A} . Igazoljuk, hogy $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1}(-1)^n = \frac{1}{2}$, valamint $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_2}(-1)^{n+1}n = \frac{1}{4}$.

2^{Gy} . Legyen $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan szám, melyre $|z| = 1$. Mutassuk meg, hogy az $a_n = z^n$ sorozatra

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{1}{1-z} + \frac{z^{n+2}-z}{(n+1)(z-1)^2}$$

teljesül, valamint, hogy $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{(1)} = \frac{1}{1-z}$. Tehát $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} z^n = \frac{1}{1-z}$. Mutassuk meg, hogy $x \in]0, 2\pi[$ esetén a $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ helyettesítéssel

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1}\cos(nx) = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1}\sin(nx) = \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}$$

adódik.

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{F}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket.

1. $f(x) = \pi - x$ $\qquad \displaystyle\mathcal{F}(f)(x) = \pi + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k \sin kx}{k}$
2. $f(x) = |\sin x|$ $\qquad \displaystyle\mathcal{F}(f)(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$
3. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $\qquad \displaystyle\mathcal{F}(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$
4. $f(x) = \pi - \dfrac{x^2}{\pi}$ $\qquad \displaystyle\mathcal{F}(f)(x) = \frac{2\pi}{3} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cos kx}{k^2}$

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett $\sum a$ *sor* C_k *(Cesáro-) összegezhető*, valamely $k \in \mathbb{N}^+$ esetén, ha az $s(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ részletösszeg sorozatból képzett

$$\sigma^{(k)} : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} s_i, & \text{ha} \quad k = 1, \\ \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sigma_i^{(k-1)}, & \text{ha} \quad k > 1 \end{cases}$$

sorozatnak létezik véges határértéke, és ekkor a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_k} a_n = \lim_{n\to\infty}\sigma_n^{(k)}$ jelölést használjuk.

III. Igazoljuk a $[0,2\pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{F}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket, ahol $a \in]0,1[$.

1^{A}. $f(x)=x^2$ $\quad \mathcal{F}(f)(x)=\dfrac{4\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\cos kx-\frac{4\pi}{k}\sin kx$

2^{Gy}. $f(x)=\sin(ax)$ $\quad \mathcal{F}(f)(x)=\dfrac{\sin^2(\pi a)}{\pi a}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a\sin^2(\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\cos kx+\frac{k\sin(2\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\sin kx$

3^{Gy}. $f(x)=x^4$ $\quad \mathcal{F}(f)(x)=\dfrac{16\pi^4}{5}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}16\frac{2k^2\pi^2-3}{k^4}\cos kx-16\frac{2k^2\pi^2-3}{k^4}\sin kx$

4^{Gy}. $f(x)=\dfrac{2\pi\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2\pi}-1}$ $\quad \mathcal{F}(f)(x)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{1+k^2}\cos kx-\frac{2k}{1+k^2}\sin kx$

$\mathrm{IV}^{\mathrm{Gy}}$. Az előző feladat felhasználásával igazoljuk az

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-a^2}=\frac{1}{2a^2}\left(1-\pi a\,\mathrm{ctg}(\pi a)\right),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}=\frac{(\pi-1)\,\mathrm{e}^{2\pi}+1}{2(\mathrm{e}^{2\pi}-1)}$$

egyenlőségeket, ahol $a \in]0,1[$.

V. Határozzuk meg az alábbi $[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ függvények Fourier-sorát, ahol $a\in]0,\pi[$ paraméter.

1^{A}. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } |x|<a,\\ 0, & \text{ha } |x|\ge a.\end{cases}$ $\qquad 2^{\mathrm{A}}$. $f(x)=\begin{cases}x, & \text{ha } |x|<a,\\ 0, & \text{ha } |x|\ge a.\end{cases}$

3^{H}. $f(x)=\begin{cases}\log\left|2\cos\dfrac{x}{2}\right|, & \text{ha } |x|<\pi,\\ 0, & \text{ha } |x|=\pi.\end{cases}$ $\qquad 4^{\mathrm{H}}$. $f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \log\sqrt{\left|\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}\right|}\,\mathrm{d}\,t, & \text{ha } |x|<\pi,\\ 0, & \text{ha } |x|=\pi.\end{cases}$

Az 1. és 2. pont alapján igazoljuk, hogy minden $a\in]0,\pi[$ paraméter esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(ka)}{k}=\frac{\pi-a}{2}\quad\text{és}\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(ka)}{k^2}=\frac{a\pi-a^2}{2}$$

teljesül.
(Vegyük észre, hogy az $a=1$ esetben a $c_k=\dfrac{\sin k}{k}$ sorozatra $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}c_k=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\frac{\pi-1}{2}$ adódik.)

VI. Tegyük fel, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus, és az

$$\mathcal{F}(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

Fourier-sora egyenletesen konvergens.

1. Határozzuk meg az $f(-x)$ függvény Fourier sorát.
2. Ha az f függvény π szerint periodikus, akkor mit mondhatunk a Fourier-együtthatóiról?