8. Parciális deriváltak

I$^{\mathrm{A}}$. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ illetve az $\mathbb{R}^m$ téren értelmezett nomától független az „*f differenciálható az a pontban*” kijelentés valamint a $(\mathrm{D}f)(a)$ lineáris leképezés.

II$^{\mathrm{A}}$. Legyen $E_1 = \mathbb{R}^3$ és $E_2 = \mathbb{R}^2$. Határozzuk meg az

$$f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \big((x,y,z),(u,v)\big) \mapsto \left(\frac{x^2}{1+u^2+\mathrm{e}^y}, vz^2\right)$$

függvény parciális deriváltjait az $a = \big((1,-1,2),(-2,3)\big)$ pontban.

III$^{\mathrm{A}}$. Legyen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x_1,x_2,x_3) \mapsto x_1 x_2^2 x_3^3.$$

1. Számoljuk ki az f függvény gradiensét az $a = (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ pontban.
2. Adjuk meg a $\operatorname{grad} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt.
3. Számoljuk ki az Δf függvényt.

IV$^{\mathrm{A}}$. Legyen $f(t) = \left(t^2 - t, \dfrac{1}{1+t^2}, \mathrm{e}^t\right)$, $g(x,y,z) = x^2y - z$ és $t_0 = 1$. Határozzuk meg a $g \circ f$ és a $f \circ g$ függvény deriváltját a t_0 pontban a közvetett függvény deriválási szabálya alapján, valamint közvetlen számolással.

V$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy az

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4y}}$$

függvényre $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}\right) f = 0$ teljesül.

VI$^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{x+y}$ függvényre minden $i,j \in \mathbb{N}$ és $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j} f(x,y) = (i+x)(j+y)\,\mathrm{e}^{x+y}\,.$$

VII$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy az

$$u : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R} \qquad (x,y,z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

függvényre $\Delta u = 0$ teljesül!

VIII$^{\mathrm{Gy}}$. Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket, ahol r az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény és $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. $\operatorname{grad}\log\|r\|^3$	2. $\operatorname{grad}\|r\|^5$	3. $\operatorname{grad} f(\|r\|)$
4. $\operatorname{div}(\lvert r\rvert \cdot \operatorname{grad}\ln\lvert r\rvert^3)$	5. $\operatorname{div}\operatorname{grad}\lvert r\rvert^5$	6. $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(\lvert r\rvert)$

IX$^{\mathrm{Gy}}$. Igazolja az alábbi azonosságokat!

1. Ha $U_1, U_2 \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, akkor

$$\operatorname{grad}(U_1 U_2) = U_1 \operatorname{grad} U_2 + U_2 \operatorname{grad} U_1.$$

2. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ és $V \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, akkor

$$\operatorname{div}(UV) = U \operatorname{div} V + \langle V, \operatorname{grad} U \rangle.$$

X$^{\mathrm{H}}$. Legyen

$$g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \qquad ((x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3)) \mapsto -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$
$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto x_0 x_1^2 x_2^3 x_3^4.$$

1. Mutassuk meg, hogy
$$\tilde{g} : \mathbb{R}^4 \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \qquad x \mapsto g(x, \cdot)$$
bijekció.
2. Számoljuk ki az f függvény g-gradiensét az $a = (4, 3, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$ pontban.
3. Adjuk meg a $\operatorname{grad}_g f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ függvényt.
4. Számoljuk ki az $\Delta_g f$ függvényt.