# 9. Többváltozós függvény deriválása

I[A] . Legyen $a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ és tekintsük az alábbi $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots 6)$ függvényeket.

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \sqrt{2x^2+3y^2} \qquad f_4(x,y) = \begin{cases} \operatorname{ch}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_5(x,y) = \begin{cases} x^3y^4 \sin\dfrac{1}{y}, & \text{ha} \quad y \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y = 0. \end{cases} \qquad f_6(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha} \quad y \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y = 0. \end{cases}$$

1. Igazoljuk, hogy az $f_1$ függvénynek minden pontban létezik parciális deriváltja, azonban a parciális deriváltak nem folytonosak az $a$ pontban, valamint $f_1$ nem differenciálható az $a$ pontban.
2. Igazoljuk, hogy az $f_2$ függvény folytonosan differenciálható az $a$ pontban.
3. Igazoljuk, hogy az $f_3$ függvénynek nem létezik a parciális deriváltja az $a$ pontban.
4. Igazoljuk, hogy az $f_4$ függvény folytonosan differenciálható az $a$ pontban.
5. Igazoljuk, hogy az $f_5$ függvény folytonosan differenciálható az $a$ pontban.
6. Igazoljuk, hogy az $f_6$ függvénynek létezik mindenhol a parciális deriváltja, a parciális derivált nem folytonos az $a$ pontban, azonban $f_6$ differenciálható az $a$ pontban.

II[A] . Írjuk fel az $xyz = 1$ felület $x + y + z = 6$ síkkal párhuzamos érintősíkjainak az egyenletét.

III[Gy] . Tekintsük az $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x,y,z\right\}$ térrészben az $xyz = a^3$ felületet, ahol $a \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy a felület érintősíkjai a koordinátasíkokkal $\dfrac{9}{2}a^3$ térfogatú tetraédert fognak közre.

IV[Gy] . Tekintsük az $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x,y,z\right\}$ térrészben (amelynek neve *pozitív ortáns*) a

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

felületet, ahol $a \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy a felület érintősíkjai a koordinátatengelyekből $a$ összegű darabokat vágnak le. (Azaz, ha az érintősík az $x'$, $y'$ és $z'$ helyen metszi a koordinátatengelyeket, akkor $x' + y' + z' = a$.)

V[Gy] . Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy a

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

függvény érintősíkjai átmennek az origón.