10. Inverz– és implicitfüggvények deriválása

I$^{\mathrm{A}}$. Legyen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto (x^3 y + xz^2, x^3 + x^2 - yz, x^2 + z^2 - xyz).$$

1. Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható az $(1, 1, 1)$ pont egy U környezetében.
2. Legyen $g = (f|_U)^{-1}$. Határozzuk meg a $(\mathrm{D}g)(2, 1, 1)$ lineáris leképezést.

II$^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk, hogy az

$$x \cos y^2 + \frac{2y}{x+2} + y = 2x$$

egyenletnek létezik olyan $x \mapsto y(x)$ implicit függvénye, mely áthalad a $(0, 0)$ ponton, valamint írjuk fel ennek az $x \mapsto y(x)$ függvénynek a $(0, 0)$ pontbeli érintőegyenesének az egyenletét!

III$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy az

$$y + x^2 \sin y + \sin x = 1$$

egyenletnek létezik olyan $x \mapsto y(x)$ implicit függvénye, mely áthalad a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ponton. Milyen lokális tulajdonsága van az implicit módon adott $x \mapsto y(x)$ függvénynek a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pontban?

IV$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk hogy az $y^2 x + y^3 = 1$ egyenlet egy $x \mapsto y(x)$ függvénykapcsolatot határoz meg az $x_0 = 0$ pont egy környezetében! Számoljuk ki $y'(0)$ értékét!

V$^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk hogy az $xy - 2\,\mathrm{e}^{x-y} - 2z + \mathrm{e}^z = 0$ egyenlet egy $(x, y) \mapsto z(x, y)$ függvénykapcsolatot határoz meg az $(x_0, y_0) = (1, 1)$ pont egy környezetében! Számoljuk ki $z'_x(1, 1)$ és $z'_y(1, 1)$ értékét!

VI$^{\mathrm{Gy}}$. Tekintsük az $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ halmazok szorzatán értelmezett

$$f : E \times F \to \mathbb{R}^2 \qquad ((x, y, z), (u, v)) = \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 + z^2 + 1)uv^2 \\ (x^4 + y^4 + 3)u^3 v^c \end{pmatrix}$$

függvényt, ahol $c \in \mathbb{R}$ paraméter. Legyen $a = (1, 2, 3) \in E$ és $b = (4, 5) \in F$. Mely c paraméterek esetén létezik olyan $\phi : E \to F$ függvény, mely az a pont egy környezetén van értelmezve, $\phi(a) = b$, és minden $x \in \operatorname{Dom} \phi$ pontra $f(x, \phi(x)) = f(a, b)$ teljesül? Igazoljuk, hogy ezekben az esetekben

$$(D\phi)(1, 2, 3) = \frac{1}{15(c-6)} \begin{pmatrix} 24 - 8c & 192 - 16c & -24c \\ 15 & -60 & 90 \end{pmatrix}.$$

VII$^{\mathrm{H}}$. Laplace-operátor polár- és gömbi-koordinátarendszerekben.

1. Legyen $H = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 |\ x \le 0\}$, $G = \mathbb{R}^2 \setminus H$, és a polárkoordinátázás legyen

$$P : \mathbb{R}^+ \times \,]-\pi, \pi[\, \to G \qquad (r, \varphi) \to (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

   Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(G, \mathbb{R})$, akkor

$$\Delta f = \quad \partial_{xx} f + \partial_{yy} f = \partial_{rr}(f \circ P) + \frac{1}{r} \partial_r (f \circ P) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi}(f \circ P)$$

teljesül, vagyis ha a G síkrészben az (r,φ) polárkoordinátákat használjuk az $f \in C^2(G,\mathbb{R})$ függvény megadására, akkor

$$\Delta f = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] f(r,\phi).$$

2. Legyen $H = \big\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \le 0\big\}$, $G = \mathbb{R}^3 \setminus H$, és a gömbi koordinátázás legyen

$$P : \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]-\pi,\pi[\to G \qquad (r,\vartheta,\varphi) \to (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta).$$

Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(G,\mathbb{R})$, akkor

$$\begin{aligned}\Delta f = {} & \partial_{xx} f + \partial_{yy} f + \partial_{zz} f = \\ = {} & \partial_{rr}(f\circ P) + \frac{2}{r}\partial_r(f\circ P) + \frac{1}{r^2}\left(\partial_{\vartheta\vartheta}(f\circ P) + (\operatorname{ctg}\vartheta)\partial_\vartheta(f\circ P) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\partial_{\varphi\varphi}(f\circ P)\right)\end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha a G térrészben az (r,ϑ,φ) gömbi koordinátákat használjuk az $f \in C^2(G,\mathbb{R})$ függvény megadására, akkor

$$\Delta f = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right] f(r,\vartheta,\varphi).$$

$\mathrm{VIII}^{\mathrm{H}}$. Mutassuk meg, hogy a Laplace-egyenlet invariáns az inverzióra. Legyen $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, amit gömbi koordinátarendszerben $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ alakban írunk fel. Igazoljuk, hogy ha $\Delta\Phi = 0$, akkor a $\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{R}{r}\Phi\left(\frac{R^2}{r},\vartheta,\varphi\right)$ függvényre is teljesül a $\Delta\Psi = 0$ egyenlet, tetszőleges $R \in \mathbb{R}$ paraméter mellett.