11. Szélsőérték

I^{A} . Mutassuk meg, hogy az

1. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ függvény $P=(0,0)$ bázispontú másodfokú Taylor-polinomja a $h=(a,b)$ helyen
$$T^f_{2,P}(h)=1-\frac{a^2+b^2}{2};$$
2. $f(x,y,z)=\dfrac{xy}{z}$ függvény $P=(1,1,1)$ bázispontú másodfokú Taylor-polinomja a $h=(a,b,c)$ helyen
$$T^f_{3,P}(h)=1+(a+b-c)+(ab-ac-bc+c^2).$$

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Keressük meg az alábbi $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeit (ahol $k\in\mathbb{R}$).

$$f(x,y)=(x-2y)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\qquad g(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\,\mathrm{e}^y\qquad h(x,y)=kx^2+xy+y^2+3x-3y$$

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$. Keressük meg az f függvény szélsőértékeit a T halmazon, ahol

1. $f(x,y)=x^3+y^3+x+y$ és $T=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\big\}$;
2. $f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$ és $T=[0,\pi]^3$;
3. $f(x,y,z)=\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{b}$ valamely $a,b\in\mathbb{R}^+$ paraméterre és $T=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$;
4. $f(x,y)=x^2y(2-x-y)$ és $T=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 6\big\}$;
5. $f(x,y)=(y+2x-4)^2+(x+y)^2$ és $T=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 1\big\}$.

IV^{A} . Keressük meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit a megadott feltételek mellett.

1. Legyen $f(x,y,z)=xyz$, az $x^2+y^2+z^2=1$ és $x+y+z=0$ feltétel mellett.
2. Legyen $f(x,y,z)=xy+yz$, az $x^2+y^2=2$, $y+z=2$ és az $x,y,z\ge 0$ feltétel mellett.
3. Legyen $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $a\in\mathbb{R}^+$ és $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{x_k}$ a $\displaystyle\prod_{k=1}^n x_k=a$ és az $x_1,\dots,x_n\ge 0$ feltétellel.

V^{Gy} . Legyen $p,q\in\mathbb{R}^+$ olyan szám, melyekre $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}^+$ esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k\le\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\qquad\textit{(Hölder-egyenlőtlenség)}$$

teljesül, oly módon, hogy az

$$f:(\mathbb{R}^+)^n\times(\mathbb{R}^+)^n\to\mathbb{R}\qquad((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n))\mapsto\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

függvény szélsőértékét keressük a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k=A$ feltétel mellett, ahol $A\in\mathbb{R}^+$ paraméter.

VI$^{\text{Gy}}$. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, valamint legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, ahol $x = (x_1, \ldots, x_n)$ és $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Definiáljuk a $q = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ vektort, és tegyük fel, hogy a q és az x vektor lineárisan független. Igazoljuk, hogy a

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta - y_i)^2$$

függvénynek az

$$\alpha_0 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad \beta_0 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

pontban van lokális minimuma, amit az

$$\alpha_0 = \frac{\|q\|^2 \langle x, y \rangle - \langle x, q \rangle \langle y, q \rangle}{\|q\|^2 \|x\|^2 - \langle x, q \rangle^2} \qquad \beta_0 = \frac{\|x\|^2 \|q\|^2 \langle y, q \rangle - \langle x, q \rangle \langle x, y \rangle}{\|q\|^2 \|x\|^2 - \langle x, q \rangle^2}$$

alakban is felírhatunk a skaláris szorzás segítségével.

VII$^{\text{A}}$. Legyen $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(E_k)_{k=1,\ldots,m} \in (\mathbb{R}^+)^n$ tetszőleges rendszer, és legyen továbbá $E, N \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy

$$\min_{1 \le k \le m} E_k < \frac{E}{N} < \max_{1 \le k \le m} E_k$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy létezik egyetlen olyan $\beta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\frac{E}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{n} E_k \, \mathrm{e}^{-\beta E_k}}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\beta E_k}}$$

teljesül, és ha minden $k = 1, \ldots, n$ esetén

$$\bar{n}_k = N \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_k}}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\beta E_k}},$$

akkor $(\bar{n}_k)_{k=1,\ldots,n} \in (\mathbb{R}^+)^n$ az egyetlen olyan pont, ahol az

$$S : (\mathbb{R}^+)^m \to \mathbb{R} \qquad (n_1, \ldots, n_m) \mapsto \sum_{k=1}^{m} n_k \log n_k$$

függvénynek lokális maximuma van, így ez egyben globális maximum is, a

$$\sum_{k=1}^{m} n_k = N \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{m} n_k E_k = E$$

11. Analízis 2, matematikusoknak, 2014.04.25., Andai Attila

feltételek mellett.
(Ezek alapján egy olyan fizikai rendszerben, mely N darab részecskét tartalmaz, m darab energiaszinttel rendelkezik és E az összenergiája, a részecskék eloszlásának az entrópiája maximalizálható, és ezt a maximumot épp a feladatban megadott esetben veszi fel.)

VIII$^{\mathrm{Gy}}$. Tegyük fel, hogy egy edény 10 ml kénsavat tartalmaz kezdetben. Rendelkezésünkre áll 1 l víz, hogy csökkentsük a kénsav mennyiségét oly módon, hogy valamennyi vizet öntünk az edénybe, az teljesen elkeveredik a kénsavval, majd kiöntés után marad mindig 10 ml folyadék az edényben, és ezt a lépést ismételhetjük addig, amíg a rendelkezésünkre álló 1 l víz el nem fogy. Mennyi kénsav fog biztosan maradni az edényben, akármilyen módon is használjuk fel az 1 l vizet?

IX$^{\mathrm{H}}$. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \frac{1}{2}y^4 - \cos\left(x^2\right) + ax^2y^2 - xy^3 - x^3y.$$

1. Mutassuk meg, hogy a $(\mathrm{D}f)(x, y) = 0$ egyenletből $(x, y) = (0, 0)$ következik.
2. Igazoljuk, hogy $(\mathrm{D}^2 f)(0, 0) = 0$ és $(\mathrm{D}^3 f)(0, 0) = 0$.
3. Mutassuk meg, hogy az $A = (\mathrm{D}^4 f)(0, 0)$ 4-lineáris leképezésre

   $$A((x, y), (x, y), (x, y), (x, y)) = x^4 + y^4 + 2ax^2y^2 - 2x^3y - 2xy^3$$

   teljesül.
4. Mutassuk meg, hogy ha $a \in \mathbb{R}^+$, akkor az f függvénynek lokális minimuma van a $(0, 0)$ pontban.