12. Többes integrálok

I$^{\mathrm{A}}$. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét az integrálás sorrendjének a felcserélésével!

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^{\frac{2}{3}}}^1 y\cos(x^2)\ \mathrm{d}\,x\ \mathrm{d}\,y$
2. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\ \mathrm{d}\,y\ \mathrm{d}\,x,$
3. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 ye^{-x^2}\ \mathrm{d}\,x\ \mathrm{d}\,y$
4. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 y\sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x\ \mathrm{d}\,y$

II$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ folytonos, korlátos függvény. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét!

1. $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\ \mathrm{d}\,x + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\ \mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\ \mathrm{d}\,x + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\ \mathrm{d}\,x + \int_2^4 \int_0^{4-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\ \mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\ \mathrm{d}\,x + \int_{\sqrt{2}}^4 \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\ \mathrm{d}\,x$

III$^{\mathrm{A}}$. Adott $T\subseteq\mathbb{R}^2$ halmaz és $f:T\to\mathbb{R}$ folytonos, korlátos függvény esetén számoljuk ki a

$$\iint\limits_T f$$

integrált!

1. Legyen $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\geq 1,\ (x-2)^2+y^2\leq 4\right\}$ és $f(x,y)=xy$.
2. A T halmaz az $x=2$, $y=x$ és az $y=\dfrac{1}{x}$ görbék által határolt korlátos tartomány és $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2}$.
3. Legyen $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1/2\right\}$ és $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

IV. Határozzuk meg az alábbi $V\subseteq\mathbb{R}^3$ halmazok térfogatát!

1$^{\mathrm{A}}$. Legyen V az $x^2+y^2=1$ egyenletű hengernek a $z=0$ és az $z=2-x-y$ egyenletű síkok közé eső része.

2$^{\mathrm{A}}$. Legyen V az a gömbhéjcikk, melyet a gömbi koordinátákkal adott $r=1$ és $r=2$ sugarú gömbök és a $\vartheta=\pi/4$ és a $\vartheta=\pi/3$ síkok határolnak.

3$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen V a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ és a $z=6-x^2-y^2$ felületek közé eső rész.

4$^{\mathrm{H}}$. Legyen V az $R\in\mathbb{R}^+$ középsugarú és $r\in\,]0,R[$ gyűrűsugarú tórusz.

5$^{\mathrm{H}}$. Legyen $R\in\mathbb{R}^+$ és $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2\leq R^2,\ y^2+z^2\leq R^2\right\}$.

6$^{\mathrm{H}}$. Legyen $R\in\mathbb{R}^+$ és $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2\leq R^2,\ y^2+z^2\leq R^2,\ x^2+z^2\leq R^2\right\}$.

7$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ 5x^2+5y^2+10z^2+6xy-4yz-4xz\leq 1\right\}$.

V. Adott $T\subseteq\mathbb{R}^3$ halmaz és $f:T\to\mathbb{R}$ folytonos, korlátos függvény esetén számoljuk ki a

$$\iiint\limits_T f$$

integrált!

1[A] . Legyen T a $z=xy$, $y=x$, $x=1$ és a $z=0$ egyenletek által meghatározott korlátos tartomány, és $f(x,y,z)=xy^2z^3$.

2[A] . Legyen T a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ és a $z=1$ felületekkel határolt korlátos tartomány és $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.

3[Gy] . Legyen T a $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ és az $x^2+y^2+z^2\leq 1$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z)=xyz$.

4[Gy] . Legyen T a $z\geq 2$ és a $z\leq 3-\sqrt{x^2+y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z)=2z$.

VI[H] . Tegyük fel, hogy a Föld egy végtelen kiterjedésű d vastagságú korong, melynek sűrűsége $\rho=5500\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Mekkora d esetén tapasztaljuk közel a Földhöz az $a=9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gravitációs gyorsulást?

Útmutatás: A korong legyen a

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid h\leq z\leq h+d\right\}$$

tartomány, és az m tömegű test legyen az origóban. Ekkor a testre ható gravitációs gyorsulás

$$ma=\int\limits_h^{h+d}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{Gm\rho rz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,z=2\pi dGm\rho.$$

Vagyis

$$d=\frac{a}{2\pi\rho G}\approx 4256\ \mathrm{km}.$$

VII[H] . Az *Euler-féle gamma-függvényt* az $a>0$ paraméter esetén a

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty u^{a-1}\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}\,u$$

képlettel definiálhatjuk.

1. Igazoljuk az $(u,v)=(st,s(1-t))$ helyettesítéssel, hogy $0<a,b$ esetén

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty u^{a-1}v^{b-1}\,\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v=\left(\int_0^\infty s^{a+b-1}\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}\,s\right)\cdot\left(\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}\,t\right)$$

   teljesül. A $0<a,b$ esetben bevezetjük az *Euler-féle béta-függvényt*

$$B(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}\,t,$$

   melyre nyilvánvalóan teljesülnek a

$$B(a,b)=B(b,a),\qquad B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

   azonosságok.

2. Igazoljuk, hogy $-1<a,b$ esetén

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^a x\cos^b x\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right)$$

   teljesül. (Használjuk a $t=\sin^2 x$ helyettesítést!)

12. Analízis 2, matematikusoknak, 2014.05.09., Andai Attila

VIII$^{\mathrm{H}}$. Polár- és gömbi koordináták.

1. Igazoljuk, hogy a
$$\Omega = \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 |\ x \le 0\right\}$$
halmaz nullmértékű, valamint a
$$P : \mathbb{R}^+ \times \left]-\pi,\pi\right[\to \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \qquad (r,\varphi) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
leképezés diffeomorfizmus . (Tehát a síkon használhatjuk a polárkoordinátákat, hiszen egy nullmértékű halmaz kivételével lefedik a síkot.)
2. Igazoljuk, hogy a
$$\Omega = \left\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \le 0\right\}$$
halmaz nullmértékű, valamint a
$$P : \mathbb{R}^+ \times \left]0,\pi\right[\times \left]-\pi,\pi\right[\to \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \qquad (r,\vartheta,\varphi) \to (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$$
leképezés diffeomorfizmus. (Tehát a térben használhatjuk a gömbi koordinátákat, hiszen egy nullmértékű halmaz kivételével lefedik a teret.)

IX$^{\mathrm{H}}$. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $R \in \mathbb{R}^+$,
$$\begin{aligned}
D_n &= \left\{(0,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ x_2 \le 0\right\},\\
S_n &= \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \le R\right\},\\
G_n &= \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ \sum_{i=1}^n x_i^2 < R\right\} \setminus D_n,\\
H_n &= \left]0,R\right[\times \left]-\pi,\pi\right[\times \left]0,\pi\right[^{n-2},
\end{aligned}$$
és legyen
$$P : H_n \to G_n \qquad (r,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}) \mapsto P(r,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}),$$
ahol a $P(r,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$ vektor k-adik ($k \in \{1,\dots,n\}$) komponense
$$(P(r,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}))_k = \begin{cases}
r\sin\alpha_1 \prod_{i=2}^{n-1} \sin\alpha_i & \text{ha} \quad k=1,\\
r\cos\alpha_1 \prod_{i=2}^{n-1} \sin\alpha_i & \text{ha} \quad k=2,\\
r\cos\alpha_{k-1} \prod_{i=k}^{n-1} \sin\alpha_i & \text{ha} \quad 2<k<n,\\
r\cos\alpha_{n-1} & \text{ha} \quad k=n.
\end{cases}$$

1. Igazoljuk, hogy a G_n halmaz nyílt.
2. Igazoljuk, hogy a D_n halmaz és az $S_n \setminus G_n$ halmaz nulla mértékű.
3. Igazoljuk, hogy $\operatorname{Dom} P = H_n$, $\operatorname{Ran} P = G_n$ és P injektív. (Tehát P bijekció.)
4. Igazoljuk, hogy P és P^{-1} folytonos. (Tehát P homeomorfizmus.)

Egy leképezés diffeomorfizmus, ha bijekció, differenciálható, és az inverze is differenciálható.

5. Igazoljuk, hogy P és P^{-1} differenciálható. (Tehát P diffeomorfizmus.)
6. Igazoljuk, hogy P Jacobi-determinánsa az $(r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in H_n$ pontban
$$J(r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} \sin^{i-1} \alpha_i.$$
7. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen
$$I_n = \int_0^\pi \sin^n x \, \mathrm{d}\, x.$$
Igazoljuk, hogy $I_0 = \pi$, $I_1 = 2$ és minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ elemre
$$\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{és} \quad I_{2n-1} I_{2n} = \frac{\pi}{n}.$$
8. Igazoljuk, hogy
$$\int_0^R \underbrace{\int_0^\pi \ldots \int_0^\pi}_{n-2} \int_0^{2\pi} J(r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \, \mathrm{d}\, \alpha_1 \, \underbrace{\mathrm{d}\, \alpha_2 \ldots \mathrm{d}\, \alpha_{n-1}}_{n-2} \, \mathrm{d}\, r = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} R^n}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \dfrac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} R^n}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$
(Tehát az n dimenziós R sugarú gömb térfogatára
$$V_n(R) = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} R^n}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \dfrac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} R^n}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$
teljesül.)
9. Igazoljuk az
$$V_1(R) = 2R, \; V_2(R) = \pi R^2, \; V_3(R) = \frac{4\pi R^3}{3}, \; V_4(R) = \frac{\pi^2 R^4}{2}, \; V_5(R) = \frac{8\pi^2 R^5}{15}, \; V_6(R) = \frac{\pi^3 R^6}{6}$$
egyenlőségeket, továbbá mutassuk meg, hogy az $V_n(1)$ sorozatra
$$\sup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} V_n(1) = V_5(1) = \frac{8\pi^2}{15} \approx 5,264 \quad \text{és} \quad \lim_{n \to \infty} V_n(1) = 0$$
teljesül.