Analízis 2.
1. Zárthelyi dolgozat
2014. 3. 13. 10.15-11.45

Név:
Neptun kód:
Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Integrálfüggvény. *(5+3+2 p.)*
   a. Legyen $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_3^{\sqrt{x}} \frac{\operatorname{arctg}(t-1)}{t+1}\,\mathrm{d}\,t$. Számolja ki $g'(4)$ értékét.
   b. Legyen
$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad x < 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0; \\ 1, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases}$$
   továbbá legyen $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h(x) = \displaystyle\int_{-5}^{x} \operatorname{sgn}$. Fejezze ki explicit módon a h függvényt.
   c. Differenciálható-e a h függvény a 0 pontban?

2. Improprius integrál. *(5+5 p.)*
   a. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}\,x = ?$
   b. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = ?$

3. Legyen $M_1 = [0, \infty[$ és minden $x, y \in M_1$ pontra az $x \neq y$ esetben legyen $d_1(x,y) = 2$, az $x = y$ esetben pedig legyen $d_1(x,y) = 0$. Legyen $M_2 = [0,1]$ és minden $x, y \in M_2$ esetén legyen $d_2(x,y) = |x-y|$. Tekintsük az $f = \chi_{\mathbb{Q}}|_{M_1}$, vagyis az *(5+5 p.)*
$$f : M_1 \to M_2 \qquad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \notin \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$
függvényt.
   a. Folytonos-e az f függvény?
   b. Egyenletesen folytonos-e az f függvény?

4. Legyen $M_1 = \mathbb{R}$ és minden $x, y \in M_1$ pontra legyen $d_1(x,y) = |2^x - 2^y|$. *(3+4+5 p.)*
   a. Igazolja, hogy (M_1, d_1) metrikus tér.
   b. Adja meg a $B_3(1)$ halmaz elemeit.
   c. Mutassa meg, hogy az M_1 tér nem teljes.

5. Legyen $V = C([0,2\pi], \mathbb{R})$, és minden $f \in V$ esetén legyen $\|f\| = \sup\limits_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|$. *(10+15 p.)*
   a. Mutassa meg, hogy az $U = \{f \in V \mid \forall x \in [0,2\pi] : \ f(x) > 1\}$ halmaz nyílt a $(V, \|\cdot\|)$ normált térben.
   b. Mutassa meg, hogy a $K = \{x \mapsto \sin(x-a) \mid a \in [0,2\pi]\}$ halmaz kompakt a $(V, \|\cdot\|)$ normált térben.