Analízis 2.

2. Pótzárthelyi dolgozat

2014. 5. 16. 14.15-15.45

Név:
Neptun kód:
Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ és $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Számolja ki az $f(A)$ mátrixot. *(10 p.)*

2. Legyen $a \in]0,1[$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre minden $x \in [-\pi, \pi[$ esetén

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 0; \\ \sin(ax), & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

teljesül.

a. Határozza meg az f függvény Fourier-együtthatóit. *(4 p.)*

b. Írja fel az f függvény a pontbeli Fourier-sorát. *(3 p.)*

c. Írja le azt a tételt, mely segítségével meghatározható az f függvény π pontbeli Fourier-sorának az összege. *(4 p.)*

d. Igazolja az alábbi formulát. *(3 p.)*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - \cos(a\pi)}{a^2 - k^2} = \frac{\cos(a\pi) + a\pi \sin(a\pi) - 1}{2a^2}$$

3. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $e_n : [1,4] \to \mathbb{R}$, $e_n(x) = 2^{nx}$. *(6+6 p.)*

a. Mutassa meg, hogy a $V = \operatorname{Span}\{e_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ altér sűrű a $C([1,4], \mathbb{R})$ térben a sup-norma szerint.

b. Igazolja, hogy ha $f \in C([1,4], \mathbb{R})$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_1^4 f(x) 2^{nx} \, \mathrm{d}\, x = 0$$

teljesül, akkor $f = 0$.

4. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ és legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C(H, \mathbb{R})$ halmazban haladó, az egész H halmazon egyenletesen konvergens függvénysorozat. Legyen $a : \mathbb{N} \to H$ olyan konvergens sorozat, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} a_a \in H$ teljesül. Igazolja, hogy ekkor *(10 p.)*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(a_n).$$

5. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméter. Igazolja, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén *(10 p.)*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(k(ax+b))}{k^4+1}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg}(k(ax+b))}{k^4+1}\right)'.$$