Analízis 2.

2. Zárthelyi dolgozat

2014. 4. 10. 10.15-11.45

Név:
Neptun kód:
Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\cos(\pi x)$ és $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Számolja ki az $f(A)$ mátrixot. *(10 p.)*

2. Legyen $a \in]0,\pi[$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre minden $x \in [-\pi,\pi[$ esetén

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad |x| \le a; \\ 0, & \text{ha} \quad x < -a \ \vee \ x > a \end{cases}$$

teljesül.

a. Határozza meg az f függvény Fourier-együtthatóit. *(4 p.)*

b. Írja fel az f függvény a pontbeli Fourier-sorát. *(3 p.)*

c. Írja le azt a tételt, mely segítségével meghatározható az f függvény a pontbeli Fourier-sorának az összege. *(4 p.)*

d. Igazolja az alábbi formulát. *(3 p.)*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin^2(ka) - ka\sin(2ka)}{k^2} = \frac{\pi}{2}a$$

3. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $e_n : [2,6] \to \mathbb{R}$, $e_n(x) = \dfrac{1}{x^{2n}}$. *(6+6 p.)*

a. Mutassa meg, hogy a $V = \operatorname{Span}\{e_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ altér sűrű a $C([2,6],\mathbb{R})$ térben a sup-norma szerint.

b. Igazolja, hogy ha $f \in C([2,6],\mathbb{R})$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_2^6 \frac{f(x)}{x^{2n}}\, \mathrm{d}\,x = 0$$

teljesül, akkor $f = 0$.

4. Mutassa meg, hogy *(10 p.)*

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+1} \right) \mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

teljesül.

(Extra 6 pontért: Igazolja, hogy $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$.)

5. Igazolja, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén *(10 p.)*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((k^2+2)x)}{k^4} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos((k^2+2)x)}{k^4} \right)'.$$