Egyenletes konvergencia

I$^{\mathrm{H}}$. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(A, \mathbb{R})$ olyan függvény, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat kváziegyenletesen konvergáljon[1] az A halmazon az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti határfüggvényhez. Mutassuk meg, hogy ekkor $f \in C(A, \mathbb{R})$.

II$^{\mathrm{H}}$. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(A, \mathbb{R})$ olyan függvény, hogy a $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti határfüggvényre $f \in C(A, \mathbb{R})$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat kváziegyenletesen konvergens az A halmazon.

III$^{\mathrm{H}}$. Minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{ha} \quad x \in \left]0, \frac{1}{n}\right]; \\ 2n - n^2 x & \text{ha} \quad x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]; \\ 0 & \text{ha} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left]0, \frac{2}{n}\right]. \end{cases}$$

Határozzuk meg az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ függvénysorozat $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvényét, valamint bizonyítsuk be, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ függvénysorozat nem egyenletesen konvergens, de kváziegyeneltesen konvergens.

IV$^{\mathrm{A}}$. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan monoton függvény, melyre a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n(a)|$ és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n(b)|$ sor konvergens. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ függvénysor abszolút- és egyenletesen konvergens.

V$^{\mathrm{H}}$. Legyen $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \dfrac{a_n}{n^x}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $[0, \infty[$ halmazon.

VI$^{*\mathrm{H}}$. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0, 1])$ halmazban haladó monoton függvények sorozata. Igazoljuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatból kiválasztható pontonként konvergens részsorozat.

VII$^{\mathrm{H}}$. (*Dini-tétel.*) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $C(M, \mathbb{R})$ halmazban haladó sorozat, amelyre minden $x \in M$ elemre $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < \infty$ és minden $n \in \mathbb{N}$ elemre $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Igazoljuk, hogy ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkent konvergens az M halmazon, és a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény akkor és csak akkor folytonos, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az M halmazon.

$^{\mathrm{Gy}}$: Gyakorló feladat; $^{\mathrm{A}}$: Alapfeladat; $^{\mathrm{H}}$: Haladó feladat.

[1] Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *kváziegyenletesen konvergens az A halmazon*, ha létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti határfüggvény az A halmazon, és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $N \in \mathbb{N}$ esetén létezik véges sok $N < n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $x \in A$ elemre valamely $n_i \in \{n_1, \ldots, n_k\}$ számra $|f(x) - f_{n_i}(x)| < \varepsilon$ teljesül. Vagyis az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat kváziegyenletesen konvergens az A halmazon, ha az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvényre

$$\Big(A \subseteq \operatorname{Dom} f\Big) \ \wedge \ \Big((\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(\exists \varphi : k \to \mathbb{N} \cap]N, \infty[)(\forall x \in A)(\exists i \in k)\left(\left|f(x) - f_{\varphi(i)}(x)\right| < \varepsilon\right)\Big)$$

teljesül.

VIII$^{\mathrm{H}}$. Mutassuk meg, hogy a $(C^{\mathrm{b}}(\mathbb{R},\mathbb{K}),\|\cdot\|_{\sup})$ térben $\overline{C_0}(\mathbb{R},\mathbb{K})$[1] megegyezik a végtelenben eltűnő[2] folytonos $\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ függvények halmazával.

IX$^{\mathrm{A}}$. Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $\mathbb{Q}$ halmazon, akkor egyenletesen konvergens az egész $\mathbb{R}$ halmazon is.

X$^{\mathrm{A}}$. Legyen $f\in C([0,1],\mathbb{R})$, valamint minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R}\qquad x\mapsto\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{x+k}{n+1}\right).$$

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ pontokénti határfüggvényt, és mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál a pontokénti határfüggvényhez.

XI$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $I\subseteq\mathbb{R}$, és minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n\in C(I,\mathbb{R})$ olyan, melyre a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens az I halmazon. Igazoljuk, hogy ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

XII$^{**\mathrm{H}}$. Legyen $I\subseteq\mathbb{R}$, és minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n\in C(I,\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n|$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens a I halmazon, ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ függvénysor minden átrendezettje egyenletesen konvergens a I halmazon.

XIII$^{\mathrm{H}}$. Mutassuk meg, hogy minden $n,k\in\mathbb{N}$ természetes számra

$$\int_0^1 x^n\log^k x\ \mathrm{d}\,x=(-1)^k\frac{k!}{(1+n)^{1+k}}$$

teljesül, vagyis speciálisan minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\int_0^1(-x\log x)^n\ \mathrm{d}\,x=\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Majd ezek alapján igazoljuk, hogy

$$\int_0^1\frac{1}{x^x}\ \mathrm{d}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$

teljesül.

[1] $C_0(\mathbb{R},\mathbb{K})=\{f\in C(\mathbb{R},\mathbb{K})|\ \operatorname{supp}f$ kompakt halmaz$\}$, ahol $\operatorname{supp}f=\overline{\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)\neq0\}}$.

[2] Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ függvény végtelenben eltűnő, ha minden $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $K\subseteq\mathbb{R}$ kompakt halmaz, hogy minden $x\in(\mathbb{R}\setminus K)$ elemre $|f(x)|<\varepsilon$.