Analízis 2, 2013/14 II. félév, vizsgatematika

A vizsga szóbeli, mindenki két tételt kap az alábbiakból; az elsőt részletesen kell ismertetni, a másodikból csak a definíciókat illetve a legfontosabb tételeket kell elmondani. A tétel után álló bekeretezett tétel (vagy tételek közül az egyik) bizonyítása szükséges a sikeres vizsgához.

Nem kell tudni a feltételes szélsőérték jellemzéséről szóló tétel, a Stokes-tétel és a Gauss–Osztrogradszkij-tétel bizonyitását.

1. A Riemann-integrálhatóság kritériumai.

$\boxed{\text{Az integrálfüggvény definíciója és tulajdonságai.}}$

Oszcillációs összeg. A Riemann-integrálható függvények algebrát alkotnak. Newton–Leibniz-tétel. Lebesgue-tétel. Improprius integrál.

2. Metrikus terek alapfogalmai.

$\boxed{\text{Baire-féle kategóriatétel metrikus téren.}}$

Metrikus tér. Adott pont körüli adott sugarú nyílt gömbi környezet metrikus térben. Nyílt halmaz, zárt halmaz, halmaz belső, torlódási és izolált pontja metrikus térben. Halmaz belseje és lezártja. Sorozatok konvergenciája metrikus terekben. Adott halmaz torlódási pontjainak és zártságának jellemzése sorozatokkal. Cauchy-sorozat és a teljes metrikus tér fogalma.

3. Sorozatok metrikus térben.

$\boxed{\text{Cantor-féle közösrésztétel.}}$

Kompakt halmazok metrikus terekben. Kompakt halmazok tulajdonságai. Lebesgue-lemma, Bolzano–Weierstrass-tétel (kompakt halmaz sorozatokkal való jellemzése). Metrikák ekvivalenciája. Heine–Borel tétel $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ kompakt részhalmazairól.

4. Függvények metrikus tereken.

$\boxed{\text{Heine tétele.}}$

Metrikus terek között ható függvények határértéke, a lim művelet. Átviteli elv határértékre. Függvény pontbeli folytonossága és folytonossága. Homeomorfizmus fogalma. Átviteli elv folytonosságra. A folytonosság topologikus jellemzése. Weierstrass-tétel (kompakt halmazon értelmezett valós értékű folytonos függvényről). Egyenletesen folytonos függvények metrikus terek között.

5. Normált terek

$\boxed{\text{Véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.}}$

Normált tér fogalma. Nyílt, zárt, kompkat és korlátos halmazok normált terekben. Sorozatok határértéke és a határérték tulajdonságai normált terekben. Banach-tér. Sorok normált terekben. Abszolút konvergens sorok. Az $\mathbb{R}^n$ tér normái: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ $(p \in [1, \infty])$ és ezek ekvivalenciája. Az $l^p_{\mathbb{K}}$ tér $(p \in [1, \infty])$. Normák ekvivalenciája. Kontrakciók és a Banach-féle fixponttétel.

6. Lineáris és multilineáris leképezések.

$\boxed{\text{Az operátornorma tulajdonságai, az } (\mathscr{L}(E,E), \|\cdot\|) \text{ tér tulajdonságai.}}$

Normált terek között ható lineáris leképezés folytonossága, normája (operátornorma). (E normált illetve Banach-tér). Normált terek között ható multilineáris leképezés fogalma, folytonossága, normája. Pozitív, pozitív definit, negatív, negatív definit és indefinit multilineáris leképezés. Multilineáris leképezés típusai: (szigorúan) pozitív/negatív (definit), (anti)szimmetrikus. Carl–Neumann-sor.

7. Függvénysorozat és függvénysor.

$\boxed{\text{Weierstrass-tétel (függvénysorok egyenletes konvergenciájáról).}}$

A pontonkénti határfüggvény, illetve a pontonkénti összegfüggvény. Függvénysor abszolút illetve normális konvergenciája. Függvénysorozat és függvénysor egyenletes és lokálisan egyenletes konvergenciája. A $(C^{\mathrm{b}}(M,V), \|\cdot\|_{\sup})$ függvénytér. Hatványsorok, Cauchy–Hadamard-tétel és Abel-tétel. Diagonalizálható lineáris leképezés függvénye.

8. Függvénysorozat és függvénysor integrálása/deriválása és approximáció.

Stone–Weierstrass-tétel (függvényalgebra sűrűségéről).

Függvénysorozat és függvénysor tagonkénti deriválhatósága és integrálhatósága. Intervallumon értélmezett normált térbe érkező függvény approximációja Bernstein-polinomokkal. Stone-tétel.

9. Differenciálszámítás alapfogalmai.

Függvények összegének, szorzatának és kompozíciójának deriváltja.

Normált terek között ható függvény pontbeli differenciálhatósága, differenciálhatósága, deriváltja. Függvény deriváltjának az egyértelműsége. Normált terek között ható függvény pontbeli iránymenti deriváltja. Függvény parciális deriváltja. Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú differenciálható függvények Jacobi-mátrixa és Jacobi-determinánsa.

10. Differenciálhatóság.

Véges növekmények formulája.

Függvény gradiense, divergenciája, rotációja. Nabla-szimbólum és Laplace-operátor. Kapcsolat a folytonos differenciálhatóság és a folytonos parciális deriváltak létezése között.

11. Inverz- és implicitfüggvény-tétel.

Inverzfüggvény-tétel. *vagy* Függvénysorozat tagonkénti differenciálhatósága.

Az implicitfüggvény. Implicitfüggvény-tétel.

12. Többszörös differenciálhatóság.

Taylor-sorfejtés.

Normált terek között ható függvény n-szeres differenciálhatósága és n-edik deriváltja. Young-tétel. Infinitezimális Taylor-formula

13. Szélsőérték.

Függvény lokális szélsőértékének jellemzése a függvény deriváltjaival.

Függvény lokális maximuma, minimuma, szigorú lokális maximuma és minimuma. Függvény lokális maximuma és minimuma adott feltétel mellett. A feltételes szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Lagrange-multiplikátor.

14. Fourier-sorfejtés.

A kétszer folytonosan differenciálható periodikus függvények Fourier-soráról.

Trigonometrikus függvények és sűrűségük a folytonos, periodikus függvények terében. Folytonos függvény Fourier-együtthatói, és Fourier-sora. Integrálható függvény Fourier-együtthatóinak konvergenciája.

15. Dirichlet- és Fejér-tétel.

Dirichlet-féle lokalizációs tétel. *vagy* Fejér tétele folytonos függvény Fourier-soráról.

A Fourier-sor n-edik részletösszegének előállítása a Dirichlet-féle magfüggvénnyel. Cesáro-összegezhető sorok. Fejér-féle magfüggvény.

16. Integráltételek. Helyettesítéses integrálás, Jacobi-determináns a polár és a gömbi koordinátarendszer esetén. Vonalmenti, felületi, felszíni és térfogati integrál kiszámolásának módja. Gauss–Osztrogradszkij-tétel, Stokes-tétel.