1. Teljes indukció és relációk

$\boxed{\mathrm{I}^{\mathrm{A}}.}$ Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat.

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
2. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
3. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
4. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Bizonyítsuk a halmazrendszerekre vonatkozó alábbi összefüggéseket.

1. $\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i \bigcap B_j)$
2. $\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i \bigcup B_j)$
3. $A \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(A \setminus A_i)$
4. $A \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(A \setminus A_i)$

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket.

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
5. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$
6. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
7. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
8. $\boxed{8.}$ Legyen $a_1, d \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $a_n = a_1 + (n-1)d$ képlettel megadott számtani sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big)$$

teljesül.

$\boxed{9.}$ Legyen $a_1, q \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $a_n = a_1 q^{n-1}$ képlettel megadott mértani sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, & \text{ha} \quad q \neq 1; \\ n a_1, & \text{ha} \quad q = 1. \end{cases}$$

IV$^{\mathrm{A}}$. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket.

1. Ha $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ akkor
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$
2. Ha $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ akkor
$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}.$$
3. Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valós szám, ahol $n \neq 0$. Igazoljuk a harmonikus, mértani és számtani közép közötti
$$\min_{1 \leq k \leq n} a_k \leq n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{-1} \right)^{-1} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \max_{1 \leq k \leq n} a_k$$
egyenlőtlenséget.

$\boxed{4.}$ Minden $0 < n \in \mathbb{N}$ esetén $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$.

$\boxed{\mathrm{V}^{\mathrm{A}}\ .}$ Binomiális kifejtés.

1. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, ahol $k < n$. Igazoljuk, hogy ekkor
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$
2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b valós számra és n természetes számra
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

VI$^{\mathrm{A}}$. Legyen $R \subseteq X \times X$ reláció. Bizonyítsuk be a következőket.

1. Az R pontosan akkor reflexív, ha $\mathrm{id}_X \subseteq R$.
2. Az R pontosan akkor tranzitív, ha $R \circ R \subseteq R$.
3. Az R pontosan akkor szimmetrikus, ha $\overset{-1}{R} = R$.
4. Az R pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $R \cap \overset{-1}{R} \subseteq \mathrm{id}_X$.
5. Pontosan akkor teljesül, hogy $R^{-1} \circ R = \emptyset$, ha $R = \emptyset$.

VII$^{\mathrm{A}}$. Az alábbi relációk közül melyik reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus, szimmetrikus, rendezés, illetve ekvivalenciareláció? Az ekvivalenciarelációknál adjuk meg az ekvivalenciaosztályokat és a faktorhalmazokat.

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}|\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}|\ xy = 1\}$
3. $\{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2|\ \exists c \in \mathbb{R}((x_1 - x_2 = 2c) \wedge (y_1 - y_2 = 3c))\}$

VIII$^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy a reláció kompozíciója asszociatív művelet. Vagyis minden $R_1 \subseteq X \times Y$, $R_2 \subseteq Y \times Z$ és $R_3 \subseteq Z \times V$ relációra

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

teljesül.

IX$^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy egy háromelemű halmazon

1. a relációk száma 512;
2. a reflexív relációk száma 64;
3. a szimmetrikus relációk száma 64;
4. az antiszimmetrikus relációk száma 216;
5. a tranzitív relációk száma 171;
6. a reflexív és szimmetrikus relációk száma 8;
7. a reflexív és antiszimmetrikus relációk száma 27;
8. a reflexív és tranzitív relációk száma 29;
9. a szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 8;
10. a szimmetrikus és tranzitív relációk száma 15;
11. az antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 152;
12. a reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 1;
13. a reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk száma 5;
14. a reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 19;
15. a szimmetrikus, antiszimmetriukus és tranzitív relációk száma 8;
16. a reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 1.

X$^{\mathrm{H}}$. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mutassuk meg, hogy egy n elemű halmazon

1. a relációk száma $2^{(n^2)}$;
2. a reflexív relációk száma $2^{n(n-1)}$;
3. a szimmetrikus relációk száma $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$;
4. az antiszimmetrikus relációk száma $2^n 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
5. a tranzitív relációk száma a szerző ismerete szerint még megoldatlan probléma;
6. a reflexív és szimmetrikus relációk száma $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
7. a reflexív és antiszimmetrikus relációk száma $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
8. a reflexív és tranzitív relációk száma a szerző ismerete szerint még megoldatlan probléma;
9. a szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 2^n;
10. a szimmetrikus és tranzitív relációk száma

$$\theta(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T(k),$$

ahol $T(k)$ a 13. alfeladatban van definiálva;

11. az antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma a szerző ismerete szerint még megoldatlan probléma;
12. a reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 1;
13. a reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk száma T_n, ahol az T_n sorozatot a $T_0 = 1$, $T_1 = 1$ kezdeti értékekkel és $n \geq 2$ esetén a

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} T_k$$

rekurzióval definiálhatjuk;
14. a reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma a szerző ismerete szerint még megoldatlan probléma;
15. a szimmetrikus, antiszimmetriukus és tranzitív relációk száma 2^n;
16. a reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 1.