2. Halmazrendszerek és függvények

I$^{\mathrm{A}}$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen A_n halmaz.

1. Mutassuk meg, hogy a $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaznak pontosan azok az elemei, amelyek legfeljebb véges számú kivétellel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az A_n halmazhoz tartoznak.
2. Mutassuk meg, hogy a $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaznak pontosan azok az elemei, amelyek végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ esetén az A_n halmazhoz tartoznak.

II$^{\mathrm{A}}$. Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ és $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, valamint tekintsük az alábbi relációkat.

$$F = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, a)\} \subseteq A \times B, \qquad G = \{(a, \beta), (c, \gamma), (b, \alpha)\} \subseteq B \times C$$

1. Határozzuk meg az $\overset{-1}{F}$, $\overset{-1}{G}$, $G \circ F$, $(\overset{-1}{G \circ F})$, $\overset{-1}{F} \circ \overset{-1}{G}$ relációkat.
2. Melyik reláció függvény a fentiek közül?

III$^{\mathrm{A}}$. Legyen A és B tetszőleges halmaz és $H \subseteq \mathcal{F}(A, B)$ olyan részhalmaza az A halmazból B halmazba képező függvények halmazának melyre teljesül, hogy minden $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 \subseteq h_2$ vagy $h_2 \subseteq h_1$.

1. Mutassuk meg, hogy $f = \bigcup H$ függvény.
2. Mutassuk meg, hogy ha minden $h \in H$ függvény injektív, akkor a $f = \bigcup H$ függvény is injektív.

IV$^{\mathrm{H}}$. Legyen E, F és G tetszőleges halmaz, valamint $f : E \to F$, $g : F \to G$ és $h : G \to E$ tetszőleges függvény. Mutassuk meg, hogy ha $h \circ g \circ f$, $f \circ h \circ g$ és $g \circ f \circ h$ bijekció, akkor f, g és h is bijekció.

V$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $n, m \in \mathbb{N}^+$, $E = \{1, \dots, n\}$ és $F = \{1, \dots, m\}$. Igazoljuk az alábbiakat.

1. Az $f : E \to F$ bijekciók száma 0, ha $m \neq n$, illetve $n!$, ha $n = m$.
2. Az $f : E \to F$ injekciók száma 0, ha $n > m$, illetve $\dfrac{m!}{(m-n)!}$, ha $n \leq m$.

3*. Az $f : E \to F$ szürjekciók száma $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$.

$\boxed{\mathrm{VI}^{\mathrm{A}}\ .}$ Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számhoz létezik egyértelműen $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, melyre $n = \dfrac{k(k+1)}{2} + j$ és $j \leq k$ teljesül. Ennek a segítségével adjunk meg egy $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijekciót.

$\boxed{\mathrm{VII}^{\mathrm{A}}\ .}$ Mutassuk meg, hogy létezik $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekció.

VIII$^{\mathrm{H}}$. Legyen $S = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, vagyis S az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$C : S \to S \qquad s \mapsto \left(n \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s(k)\right)$$

$$T : S \to S \qquad s \mapsto (n \mapsto (-1)^n s(n))$$

1. Mutassuk meg, hogy
$$C \circ T \circ C \circ T = \mathrm{id}_S$$
teljesül.
2. Igazoljuk, hogy $C \circ T$ bijekció.
3. Mutassuk meg, hogy C is bijekció, és $C^{-1} = T \circ C \circ T$.

$\boxed{\mathrm{IX}^{\mathrm{A}}.}$ Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto a \\ \mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto b \\ \bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto a - b\,\mathrm{i} \\ |\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}$$

Igazoljuk, hogy minden $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra teljesülnek az alábbiak.

1. $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z - \bar{z}}{2\,\mathrm{i}}$
2. $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2$, $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2$
3. $z\bar{z} = |z|^2$
4. $z \neq 0 \quad \to \quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\mathrm{Re}\, z}{|z|^2} - \dfrac{\mathrm{Im}\, z}{|z|^2}\,\mathrm{i}$
5. $|z| = 0 \quad \leftrightarrow \quad z = 0$
6. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
7. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
8. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
9. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2$
10. $\exists v \in \mathbb{C} : \quad z = v^2$