3. Komplex számok és elemi topológiájuk

$\boxed{\mathrm{I}^{\mathrm{A}}\ .}$ Végezzük el az alábbi műveleteket.

$$\frac{(2+3\,\mathrm{i})(4-5\,\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} \qquad \frac{(1+\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^2} \qquad \left|\frac{2+5\,\mathrm{i}}{1+3\,\mathrm{i}}+3+5\,\mathrm{i}\right|$$

$\boxed{\mathrm{II}^{\mathrm{A}}\ .}$ (*Bernoulli-egyenlőtlenség.*) Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $x_1, \ldots x_n \in \,]-1, \infty[$ számra, ha bármely $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_i x_j \geq 0$ teljesül, akkor

$$1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i),$$

speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra $-1 \leq x$ esetén

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

$\boxed{\mathrm{III}^{\mathrm{A}}\ .}$ Mutassuk meg, hogy minden $x \in [0, 1]$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(1 + x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x$$

teljesül.

IV$^{\mathrm{A}}$. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $0 < x \in \mathbb{R}$.

1. Mutassuk meg, hogy az
$$H = \{z \in \mathbb{R} |\ 0 < z, z^n < x\}$$
halmaz nem üres és felülről korlátos.
2. Legyen $y = \sup H$. Mutassuk meg, hogy az $y \in \mathbb{R}$ számra $y^n = x$ teljesül.
3. Igazoljuk, hogy ha $z \in \mathbb{R}$, $0 < z$ és $z \neq y$, akkor $z^n \neq x$.

$\boxed{\mathrm{V}^{\mathrm{A}}\ .}$ Legyen $A = \,]-2, -1[\, \cup \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R}\ | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup [2, 3]$. Határozzuk meg az A halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontjait.

VI$^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ egy részhalmaza pontosan akkor zárt, ha tartalmazza az összes torlódási pontját.

VII$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$ halmaz sűrű a $\mathbb{C}$ halmazban.

VIII$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}$ esetén

$$\overline{\{z \in \mathbb{K} |\ \ |x - z| < r\}} = \{z \in \mathbb{K} |\ \ |x - z| \leq r\}$$

teljesül.

IX$^{\mathrm{H}}$. Bizonyítsuk be, hogy ha a nem üres $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz zárt és nyílt, akkor $A = \mathbb{R}$.