4. Topológia és sorozatok

I^{A} . Mutassuk meg, hogy ha $A, B \subseteq \mathbb{R}$ halmazok felülről korlátos, nem üres halmazok, akkor az $A + B$ halmaz is felülről korlátos és $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$ teljesül.

II^{Gy} . Mutassuk meg, hogy ha $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ halmazok felülről korlátos, nem üres halmazok, akkor az AB halmaz is felülről korlátos és $(\sup A)(\sup B) = \sup(AB)$ teljesül.

III^{Gy} . Mutassuk meg, hogy minden nem üres, korlátos $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén $\sup A - \inf A = \sup(A - A)$ teljesül.

IV^{A} . Adjunk példát olyan $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazra, melyre $\operatorname{Int} \overline{A} = \mathbb{R}$ és $\overline{\operatorname{Int} A} = \emptyset$ teljesül.

V^{A} . Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ tetszőleges halmaz. Igazoljuk, hogy ekkor fennállnak az alábbi egyenlőségek.

1. $\operatorname{Int} A = \mathbb{K} \setminus \overline{\mathbb{K} \setminus A}$
2. $\overline{A} = \mathbb{K} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{K} \setminus A)$

VI^{A} . Mutassuk meg, hogy az alábbi sorozatok határértéke végtelen a definíció szerint.

1. $a_n = \sqrt{n^2 - n}$
2. $a_n = n^3 - 3n^2 + 3n - 5$
3. $a_n = \sqrt{n^4 + 2n^3}$
4. $a_n = \sqrt{n^4 - 5n^3}$

VII^{Gy} . Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges konvergens sorozat. Igazoljuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

1. a $\{n \in \mathbb{N} |\ |a_n - \lim a| < \varepsilon\}$ halmaz végtelen;
2. a $\{n \in \mathbb{N} |\ |a_n - \lim a| > \varepsilon\}$ halmaz véges.

VIII^{A} . Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + 3n + 6}{3n^2 - 1}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!(5+2n)}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^2 + 3\sqrt{n} - 9\right)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 10n - 2}{5n^3 + 2n^2 + n + 1}$

IX^{Gy} . Legyen $k, l \in \mathbb{N}$ és legyen $(a_i)_{i\in k+1}$ és $(b_j)_{j\in l+1}$ valós számok egy rendszere. Keressük meg a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$$

határértéket.

X^{A} . Keressük meg az alábbi gyökös kifejezések határértékét.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+5n}-\sqrt{2n^2-n}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2+3}-\sqrt{n^4+n}\right)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+3}-\sqrt{n^2+an+1}\right)\qquad(a\in\mathbb{R})$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^6+n^5}-\sqrt[3]{n^6-n^5}\right)$

XI^{A} . Határozzuk meg az alábbi rekurzióval definiált sorozatok határértékét!

1. $a_{n+1}=7-\dfrac{10}{a_n}$, $a_1=4$
2. $a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$, $a_1=1$ és $a_1=5$
3. $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$, $a_1=1$

XII^{A} . Legyen $a_0, a_1=1$, és minden $n\in\mathbb{N}\setminus 2$ esetén legyen

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}.$$

1. Igazoljuk, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ természetes számra
$$a_n=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
teljesül.
2. Igazoljuk, hogy a
$$b:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}\qquad n\mapsto\frac{a_{n+1}}{a_n}$$
sorozat olyan Cauchy-sorozat, mely nem konvergens a $\mathbb{Q}$ számtestben.

XIII^{H} . Másodrendű lineáris rekurzió. Legyenek $a,b,x_0,x_1\in\mathbb{R}$ paraméterek, és minden $n\in\mathbb{N}$ számra legyen

$$x_{n+2}=ax_n+bx_{n+1}.$$

1. Igazoljuk, hogy ha $b^2+4a>0$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ számra
$$x_n=\left(x_0+\frac{2x_1-bx_0}{\sqrt{b^2+4a}}\right)\cdot\frac{\left(b+\sqrt{b^2+4a}\right)^n}{2^{n+1}}+\left(x_0-\frac{2x_1-bx_0}{\sqrt{b^2+4a}}\right)\cdot\frac{\left(b-\sqrt{b^2+4a}\right)^n}{2^{n+1}}$$
teljesül.
2. Igazoljuk, hogy ha $b^2+4a=0$ és $b\neq 0$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ számra
$$x_n=\left(x_0(1-n)+\frac{2n}{b}x_1\right)\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^n$$
teljesül.
3. Igazoljuk, hogy ha $b^2+4a<0$ és $b\neq 0$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ számra
$$x_n=(-a)^{\frac{n}{2}}\cdot\operatorname{sgn}(b)^n\cdot\left(x_0\cos(n\varphi)+\frac{2x_1-bx_0}{\sqrt{-b^2-4a}}\sin(n\varphi)\right)$$
teljesül, ahol $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{-b^2-4a}}{b}$.