5. Speciális sorozatok

$\boxed{\mathrm{I}^{\mathrm{A}}\ .}$ Határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+100}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-100}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3-2n+3}{n\sqrt{n}+8}}$
11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n^2 5^n}{9n^3+10^n}$
12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n n^2+1}{10^n n^3+\sqrt{n}}$
13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{n}{4^n}}{\frac{n^2}{5^n}}$
14. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+2^n}{n+3^n}}$
15. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+4^n}{5^n+3n}}$
16. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 3^n+n^3 4^n}{n^4 5^n}}$

$\boxed{\mathrm{II}^{\mathrm{A}}\ .}$ Határozzuk meg a következő a sorozatok esetén $\limsup a$ és $\liminf a$ értékét!

1. $a_n = \left(\cos n\frac{\pi}{2}\right)\frac{2n^2-3}{n^2+n+8}$
2. $a_n = \frac{4-n^2}{n+3}$
3. $a_n = \sqrt{\frac{n^3+(-1)^n n^3}{3n^3+n+8}}$
4. $a_n = \left(\frac{3-n}{5+n}\right)\left(\frac{4n-1}{2n+5}\right)^3$

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy minden $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatra teljesülnek az alábbiak.

1. Az $x\in\mathbb{R}$ számra pontosan akkor teljesül, hogy $\limsup a = x$, ha minden $c<x$ esetén az $\{n\in\mathbb{N}|\ c<a_n\}$ halmaz végtelen, és minden $c>x$ esetén az $\{n\in\mathbb{N}|\ c<a_n\}$ halmaz véges.
2. Az $x\in\mathbb{R}$ számra pontosan akkor teljesül, hogy $\liminf a = x$, ha minden $c<x$ esetén az $\{n\in\mathbb{N}|\ c>a_n\}$ halmaz véges, és minden $c>x$ esetén az $\{n\in\mathbb{N}|\ c>a_n\}$ halmaz végtelen.

IV^{H} . Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre minden $m,n\in\mathbb{N}$ esetén $a_{m+n}\le a_m a_n$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{a_n}\ .$$

$\boxed{\mathrm{V}^{\mathrm{A}}\ .}$ (*Gyök-kritérium sorozatokra.*) Mutassuk meg, hogy ha az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

VI$^{\mathrm{A}}$. (*Hányados-kritérium sorozatokra.*) Mutassuk meg, hogy ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

VII$^{\mathrm{H}}$. Igazoljuk a

$$\lim_{n\to\infty} \{(2+\sqrt{3})^n\} = 1$$

határértéket, ahol $\{\cdot\}$ a törtrész függvényt jelöli!

VIII$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk az alábbi határértékeket.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$

2*. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{3n}{n}} = \dfrac{27}{4}$

3**. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{n}} = \dfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\boxed{\text{IX}^{\text{A}}\text{ .}}$ Igazoljuk a sorokra vonatkozó alábbi összefüggéseket!

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} = 1$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n} = 3$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^3-n} = 1$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = 1$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}} = 1$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\log 2$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n+1) = -\frac{\pi}{4}$