6. Sorok

$\boxed{\text{I}^{\text{A}}.}$ A majoráns, illetve minoráns kritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, illetve melyek divergensek.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-8n^2+1}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n+3}{2n^4+2n^2+7}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n+3}{2n^5+2n^2+7}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-1}\right)$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}$ 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ 9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

$\boxed{\text{II}^{\text{A}}.}$ Konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, mi a határértékük?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{2^{2n}\,\mathrm{i}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+4\,\mathrm{i})^n}{4^n(1-\mathrm{i})^{2n}}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-4^n+5(-1)^n}{3^{2n}}$

III^{H}. Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{C}$, $|x|<1$ esetén

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} kx^k = \frac{x^n}{x-1}n - \frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}$, valamint $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(x-1)^2}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2x^k = \frac{x^n}{x-1}n^2 - \frac{2x^{n+1}}{(x-1)^2}n + \frac{x(1+x)(x^n-1)}{(x-1)^3}$, valamint $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$.

$\boxed{\text{IV}^{\text{A}}.}$ A gyökkritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5 4^{n+1}}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{9^n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$ 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2}\frac{1}{3^{2n+1}}$ 9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{n^3}$

10. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$ 12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln^n n}$

$\boxed{\text{V}^{\text{A}}\text{ .}}$ A hányadoskritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{(n-1)!}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{5^{3n} n!(n+1)!(n+2)!}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+n)^n}{(n+1)!}$

$\boxed{\text{VI}^{\text{A}}\text{ .}}$ A Leibniz-kritérium segítségével vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek illetve feltételesen konvergensek-e.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\sqrt{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n-\log n}$ 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$ 9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{0.1}$

VII$^{\text{Gy}}$. Becsüljük meg, hogy hányadik részletösszeg esetén lesz a sor összegére kapott becslés hibája 10^{-4}-nél kisebb!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2}{5^{2n}+3n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n+3}$$