7. Sorok és hatványsorok

$\boxed{\text{I}^{\text{A}}\ .}$ I. Igazoljuk az alábbi határértékeket.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n+3} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{n} = \sqrt[5]{\mathrm{e}}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^{n} = 0$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = 0$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)^{2n+1} = \mathrm{e}^{10}$

9*. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1) = 1$

10**. $\lim\limits_{n\to\infty} n(n(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1)-1) = \frac{1}{2}$

II$^{\text{Gy}}$. Konvergencia-kritériumok segítségével döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+n)^n}{(n+1)!}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n-3}{2n^2-7n+10}\right)^{\frac{1}{n}}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2}\frac{1}{3^{2n+1}}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n}{\left(4+\frac{5}{n}\right)^n}$

$\boxed{\text{III}^{\text{A}}\ .}$ Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergencia sugarát és adjuk meg, hogy mely $x\in\mathbb{R}$ értékek esetén lesz a sor konvergens!

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{n+1}x^n$
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}x^{2n}$
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$
7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!}(x+7)^n$
8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{9^n}(x-2)^{2n}$
9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n+1}x^n$

IV$^{\text{H}}$. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a,\alpha,x\in\mathbb{R}^+$ paraméterek mellett

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{x}{n^\alpha}\right)^n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad a<1; \\ \infty, & \text{ha} \quad (a>1)\ \vee\ (a=1\ \wedge\ \alpha<1); \\ 1, & \text{ha} \quad a=1\ \wedge\ \alpha>1; \\ \mathrm{e}^x, & \text{ha} \quad a=\alpha=1. \end{cases}$$

$\boxed{\text{V}^{\text{A}}.}$ Abszolút- vagy feltételesen konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n + n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4-n}{4+n}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2 + n3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt[3]{n^2+1}}$$

VI$^{\text{Gy}}$. Igazoljuk, hogy a $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sor konverges, de önmagával vett Cauchy-szorzata már divergens.

VII$^{\text{Gy}}$. Legyen $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim a$$

teljesül.

VIII$^{\text{A}}$. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat, és legyen $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan, hogy $|q| = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n a_n q^n$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \right| \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \frac{2}{|1-q|}$$

teljesül. (*Dirichlet-féle kritérium.*)

IX$^{\text{H}}$. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat, és legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \neq 1$. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n a_n \sin(nx)$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) \right| \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right)$$

teljesül.

X$^{\text{H}}$. Legyen $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat melyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k = 0.$$