8. Határérték és folytonosság

I$^{\text{A}}$. Igazoljuk az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{2x+1}=3$
2. $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+3x-1)=-3$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2x-3}{x+1}=2$
5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+2}{(x+3)^2}=-\infty$
6. $\lim\limits_{x\to \infty}(2-4x^3)=-\infty$

II$^{\text{A}}$. Keressük meg az alábbi határértékeket (ahol $n\in\mathbb{Z}$)!

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+9x^2+27x+27}$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2}$
3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2}$
4. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}(7x^9-x^4+3x^2+1)$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+1}+x$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+3})$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{9+x}-3}$
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x}$
9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\mathrm{e}^{4x}-1}$

III$^{\text{A}}$. Legyen $A=[-1,0]\cup\big(]0,1[\cap\mathbb{Q}\big)\cup\{3,4,5\}$ és legyen

$$f:A\to\mathbb{R}\qquad x\mapsto\begin{cases}0 & \text{ha}\quad x<2 \text{ és } x\notin\mathbb{Q},\\ x & \text{ha}\quad x<2 \text{ és } x\in\mathbb{Q},\\ 5 & \text{ha}\quad x=3,\\ 8 & \text{ha}\quad x=4 \text{ vagy } x=5.\end{cases}$$

Mely pontokban folytonos az f függvény?

IV$^{\text{A}}$. Igazoljuk, hogy az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\cdot\chi_{\mathbb{Q}}$ függvény csak a 0 pontban folytonos.

V$^{\text{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy ha az $f:\,]-1,1[\,\to\mathbb{R}$ függvény folytonos a 0 pontban, és minden $x\in\,]-1,1[$ esetén $f(x)=f(x^2)$, akkor az f függvény folytonos.

VI$^{\text{H}}$. Adott $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ esetén legyenek $p_x\in\mathbb{Z}$ és $q_x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ azon egyértelműen meghatározott számok, melyekre $x=\dfrac{p_x}{q_x}$, valamint p_x és q_x relatív prímek. Az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad x\mapsto\begin{cases}0, & \text{ha}\quad x\notin\mathbb{Q}\setminus\{0\},\\ \dfrac{1}{q_x}, & \text{ha}\quad x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}\end{cases}$$

függvényt *Dirichlet-függvénynek* nevezzük. Igazoljuk, hogy a A Dirichlet-függvénynek

1. minden pontban létezik jobb- illetve bal oldali határértéke;
2. a 0 helyen és minden irracionális pontban folytonos;
3. minden $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ pontban szakadása van, úgy, hogy $\lim\limits_{a+}f=\lim\limits_{a-}f$.

VII$^{\mathrm{A}}$. Bolzano-tétel következményei.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokszámú polinomnak van zérushelye.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\operatorname{Ran} f = [a, b]$, akkor létezik olyan $x_0 \in [a, b]$, amelyre $f(x_0) = x_0$.
3. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, melyre $x_0 \sin x_0 = \frac{\pi}{4}$.
4. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $(x_i)_{i=1,\ldots,n} \in I^n$ és $f \in C(I, \mathbb{R})$. Igazoljuk, hogy létezik olyan $x_0 \in I$ pont, melyre
$$f(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$
teljesül.
5. Legyen $f \in C([0, 2], \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $u, v \in [0, 2]$, melyre
$$v - u = 1 \qquad \text{és} \qquad f(v) - f(u) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

$\boxed{\text{VIII}^{\mathrm{A}}\ .}$ Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \dfrac{1}{x}$, a $g(x) = x^2$ és a $h(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ függvény a $]0, 1]$, $[1, 2]$ és a $]0, \infty[$ intervallumon?

IX$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f \in C([a, \infty[, \mathbb{R})$ olyan függvény, melyre $\lim_{\infty} f \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ekkor f egyenletesen folytonos az egész $[a, \infty[$ halmazon.

X$^{\mathrm{H}}$. Függvény konvexitása és folytonossága.

1. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény az I intervallumon. Mutassuk meg, hogy ekkor az f függvény folytonos.
2. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Igazoljuk, hogy az f függvény pontosan akkor konvex, ha minden $x_1, x_2 \in I$ számra
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$
teljesül.