10. Differenciálszámítás alapjai

I$^{\mathrm{A}}$. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és legyen $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, melynek a deriváltja korlátos. Igazoljuk, hogy ekkor f egyenletesen folytonos az egész I intervallumon.

$\boxed{\mathrm{II}^{\mathrm{A}}\ .}$ Adjuk meg az alábbi $f(x)$ függvények x_0 pontbeli érintőjének az egyenletét.

1. $f(x) = x^2 \quad x_0 = 4$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \quad x_0 = 2$
3. $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$
4. $f(x) = \sin x^2 \quad x_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

$\boxed{\mathrm{III}^{\mathrm{A}}\ .}$ Számoljuk ki a következő határértékeket!

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3}{\mathrm{e}^{2x}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x\sin 2x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(2 - \mathrm{e}^{\sin x}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^3 \ln x^5$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin x}\right)$
8. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^x$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\operatorname{ch} 3x)^{\frac{1}{x^2}}$
12*. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\left((2-\operatorname{ch} x)^{\sin x}\right) - \frac{\pi}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}$

IV$^{\mathrm{A}}$. Számoljuk ki az alábbi határértékeket, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{ax} - 1 - ax}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{ax} - \operatorname{ch}(bx) - \operatorname{sh}(bx)}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{ax} - \cos(bx) - \sin(bx)}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(ax) + \sin(ax) - 2ax}{x^5}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch}(ax) + \cos(ax) - 2}{x^4}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{ax} - \cos(ax) - \sin(ax)}{x\left(\mathrm{e}^{bx} - \cos(bx)\right)}$

$\boxed{\mathrm{V}^{\mathrm{A}}\ .}$ Elemi egyenlőtlenségek származtatása a középérték tételekből.

1. Igazoljuk, hogy minden $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ számra $\sin x \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{1}{2}$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}^+$ paraméterre, az $a < b$ esetben $\dfrac{1}{b} < \dfrac{\log b - \log y}{b - a} < \dfrac{1}{a}$ teljesül.
3. Igazoljuk, hogy tetszőleges $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ számra $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \dfrac{b-a}{\cos^2 b}$ teljesül.

VI$^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $f, g \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ akkor $fg \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ valamint

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

VII$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan függvény, mely folytonos a 0 pontban és valamely $a\in\,]0,1[$ számra

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(ax)}{x}=\alpha$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor f differenciálható a 0 pontban, továbbá $f'(0)=\dfrac{\alpha}{1-a}$. Mutassuk meg, hogy a fenti következtetés tetszőleges $a\in\,]1,\infty[$ paraméter esetén is igaz marad.

VIII$^{\mathrm{H}}$. Feladatok a határérték és deriválás kapcsolatáról.

1. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan páratlan függvény, melyre $0\in\mathrm{Dom}(f''')$ teljesül, és legyen $a,b\in\mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(at)}{at^3}-\frac{f(bt)}{bt^3}\right)=\frac{a^2-b^2}{6}f'''(0).$$

2. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ háromszor differenciálható függvény, és legyen $u\in\mathrm{Dom}(f''')$ tetszőleges pont. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(u+t)-f(u-t)-2tf'(u)}{t^3}=\frac{f'''(u)}{3}.$$

IX$^{\mathrm{H}}$. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan mindenhol differenciálható függvény, melynek a deriváltja folytonos. Tetszőleges $a\in\mathbb{R}$ paraméter esetén definiáljuk a

$$x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\qquad n\mapsto x_n=\begin{cases} a, & \text{ha}\quad n=0,\\ f(x_{n-1}), & \text{ha}\quad n>0\end{cases}$$

sorozatot. Tegyük fel, hogy a $\mathrm{Ran}\,x$ halmaz számossága végtelen, valamint létezik a $\lim\limits_{\infty} x=A$ határérték. Mutassuk meg, hogy ekkor $|f'(A)|\le 1$ teljesül.