11. Konvexitás és szélsőérték meghatározás

I^{A} . Példák a Jensen-egyenlőtlenségre.

1. Igazoljuk, hogy minden $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ számra, az $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$ és $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$ jelölések mellett
$$X \log \frac{X}{A} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \log \frac{x_i}{a_i}$$
teljesül. (Segítség: Tekintsük az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \log$ függvényt.)
2. Igazoljuk, hogy minden $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ és $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+$ számra, az $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$ jelölés mellett
$$\sqrt[A]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}} + \sqrt[A]{\prod_{i=1}^{n} y_i^{a_i}} \leq \sqrt[A]{\prod_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{a_i}}$$
teljesül. (Segítség: Tekintsük a $\log(1 + \exp)$ függvényt.)

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Függvények konvexitása.

1. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex függvény. Mutassuk meg, hogy ha létezik olyan $c \in\,]a, b[$ szám melyre $f(a) = f(c) = f(b)$, akkor az f függvény állandó.
2. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan konvex függvény, melyre g monoton növő és $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ intervallum. Mutassuk meg, hogy ekkor a $g \circ f$ függvény is konvex.
3. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható fggvény, továbbá legyen $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(x^{-1}\right)$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^+} f$ függvény pontosan akkor konvex, ha a g függvény konvex. (Igaz marad-e az állítás, ha f nem kétszer differenciálható?)
4. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}^+$ kétszer differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy a $\log \circ f$ függvény pontosan akkor konvex, ha $f \cdot f'' \geq (f')^2$.

$\boxed{\mathrm{III}^{\mathrm{A}}\ .}$ Van-e minimuma illetve maximuma az $f(x) = x^2\, \mathrm{e}^{-3x}$ függvénynek a $[0, 1]$ intervallumon, ha igen, határozzuk meg a szélsőértékeket.

$\mathrm{VI}^{\mathrm{Gy}}$. Szélsőérték feladatok.

1. Legyen $T \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk területe. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk kerülete minimális?
2. Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk kerülete. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk területe a legnagyobb?
3. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú henger adatait!
4. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúp adatait!
5. Határozzuk meg a $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, felül nyitott, legkisebb felszínű henger adatait!
6. Adott $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, négyzet alapú tartályt akarunk készíteni a legkevesebb anyagból. Mekkorák legyenek az élek, ha a tartály felül nyitott?

$\boxed{\mathrm{V}^{\mathrm{A}}}$. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x^3\, \mathrm{e}^{-x}$ és a $g(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\, \dfrac{x}{1+x}$ függvényen.

Teljes függvényvizsgálatnál válaszoljunk az alábbi kérdésekre: hol értelmezett a függvény, mi a határértéke a plusz- és mínusz végtelenben, illetve a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaz határpontjaiban, mi a lineáris aszimptotája a plusz- és mínusz végtelenben, hol monoton növő illetve csökkenő a függvény, hol van lokális szélsőértéke, és a milyen jellegű szélsőérték (maximum, minimum), hol konvex illetve konkáv a függvény, hol van inflexiós pontja, hol van globális minimuma illetve maximuma a függvénynek, mi a függvény értékkészlete.

$\boxed{\mathrm{VI}^{\mathrm{A}}\ .}$ A binomiális sorfejtés segítségével írjuk fel az arctg, arcsin, $\sqrt{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$, $\sqrt[3]{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}$ függvény 0 körüli 9-ed rendű Taylor-polinomját.

$\mathrm{VII}^{\mathrm{Gy}}$. Határozzuk meg $\sqrt[3]{10}$ értékét $0,01$ pontossággal.

$\mathrm{VIII}^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek (ahol $x \in \mathbb{R}$).

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{\mathrm{e}}-1\right)^{\mathrm{e}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{x}{k}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}-\sin\frac{1}{k}\right)$

$\mathrm{IX}^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy minden $x \in \left]-1,1\right[$ esetén

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \ .$$

X^{Gy} . Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in C^2(I,\mathbb{R})$ és legyen $x_0 \in I$ olyan pont, melyre $f''(x_0) \neq 0$. Igazoljuk, hogy ekkor az f függvényt az x_0 pontban legjobban közelítő kör egyenlete

$$y : [x_c - R, x_c + R] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto y_c - \mathrm{sgn}(f''(x_0)) \cdot \sqrt{R^2 - (x-x_c)^2},$$

ahol

$$R = \frac{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}, \qquad x_c = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)} \quad \text{és} \quad y_c = f(x_0) + \frac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)}.$$

(Vagyis igazoljuk, hogy az $y : [x_c - R, x_c + R] \to \mathbb{R}$ egyenletű félkörre $y(x_0) = f(x_0)$, $y'(x_0) = f'(x_0)$ és $y''(x_0) = f''(x_0)$ teljesül.)