

# Vizsgatematika

## Analízis 1, 2014/15 I. félév

A vizsga szóbeli, mindenki két tételt kap az alábbiakból; az elsőt részletesen kell ismertetni, a másodikból csak a definíciókat kell elmondani.

Nem kell tudni az  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  és  $\mathbb{C}$  halmazokon bevezetett műveletek tulajdonságainak a bizonyítását.

**1. Halmazelméleti alapok.** Elemi halmazelméleti jelek és műveletek ( $\in$ ,  $\subseteq$ ,  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\setminus$ ) Rendezett párok. Relációk, ekvivalenciarelációk és függvények. (Reflexív, (anti)szimmetrikus, tranzitív relációk; reláció értelmezési tartománya, értékkészlete, inverze; relációk kompozíciója; ekvivalencia osztályok; injektív-, szürjektív- és bijektív függvények.) Cantor-tétel. Halmazrendszer fogalma. Kiválasztási axióma.

**2. Halmazelmélet és számok.** Rendezés, infimum, szuprémum, legnagyobb/legkisebb elem, maximális/minimális elem. Lineáris rendezés, jólrendezés. Monoton halmaz, végtelenségi axióma, teljes indukció tétele. Természetes számok. Rendezett test, teljesen rendezett test, arkhimédészi módon rendezett test. Véges, végtelen, megszámlálható és megszámlálhatóan végtelen halmaz.

**3. A valós számok topológiája.** Belső pont, határpont, torlódási pont, izolált pont. Nyílt, zárt, korlátos és kompakt halmaz. Halmaz belseje, halmaz lezártja. Cantor-féle közösrésztétel. Sűrű halmaz. Borel–Lebesgue-tétel valós számokra. Bernoulli-egyenlőtlenség. A vektortér fogalma és a skaláris szorzás fogalma. Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség

**4. Sorozatok.** A határérték és elemi tulajdonságai. Monoton, korlátos sorozat fogalma és tulajdonságai. Részsorozat. Torlódási pont jellemzése sorozatokkal. Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel. Bolzano–Weierstrass-tétel.  $\liminf$ ,  $\limsup$ . Cauchy-sorozat, Cauchy-kritérium. Nevezetes határértékek:  $n^\alpha$ ,  $q^n$ ,  $\sqrt[n]{n}$ ,  $(1 + \frac{x}{n})^n$ .

**5. Sorok.** Sor konvergenciája, és elemi tulajdonságai. Cauchy-kritérium. Abszolút konvergencia. Majoráns/minoráns kritérium. Konvergencia-kritériumok: kondenzációs, gyök, hányados kritérium. Leibniz-sor. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok. Cauchy-szorzat. Mertens-tétel. Abel-féle kritérium.

**6. Elemi függvények.** Hatványsor definíciója, konvergencia sugara és az elemi Cauchy–Hadamard-tétel. Elemi függvények ( $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$ ) definíciója. Az  $\exp$  tulajdonságai. Euler-formula:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . A  $\sin$ ,  $\cos$  alaptulajdonságai.

**7. Függvények főbb jellemzői és határértéke.** Páros, páratlan, (szigorúan) monoton növekvő és csökkenő, konkáv és konvex, periodikus függvény. Jensen-egyenlőtlenség. Függvény határértéke és a határérték elemi tulajdonságai. Átviteli elv határértékre. Bal és jobb oldali határérték, kapcsolatuk a határértékkal.

**8. Valós-valós függvények folytonossága.** Függvény folytonossága, folytonos függvények algebrát alkotnak, folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény. Átviteli elv folytonosságra. A folytonosság topologikus jellemzése. Kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt. Weierstrass-féle maximum-minimum elv. Bolzano-tétel. Egyenletes folytonosság, Heine-tétel.

**9. Hatványsorok.** A hatványsorként értelmezett függvények határértéke megegyezik a helyettesítési értékkel a konvergenciasugáron belül, és itt folytonos is a függvény. A  $\pi$  definíciója, és a trigonometrikus függvények periodicitása. A hatványsorként értelmezett függvényeket lehet tagonként deriválni a konvergenciasugáron belül.

**10. A differenciálszámítás alapjai.** A differenciálás fogalma, függvény deriváltja. A folytonosság kapcsolata a differenciálhatósággal. Differenciálható függvények algebrát alkotnak. Differenciálás alaptulajdonságai. Középértéktételek: Rolle, Lagrange, Cauchy. L'Hospital-szabály.  $n$ -szer és végtelenszer differenciálható függvények. Folytonosan differenciálható függvények.

**11. A differenciálszámítás alkalmazása.** Konvexitás/konkavitás kapcsolata a deriválással. Taylor-sorfejtés. Lokális szélsőérték fogalma és kapcsolata a függvény deriváltjával. Binomiális sorfejtés. Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség.

**12. Határozatlan integrál.** Határozatlan integrál fogalma és elemi határozatlan integrálok. Parciális és helyettesítései integrálás. Parciális törtekre bontás. Racionális függvények integrálása.

**13. Határozott integrálás.** Korlátos intervallumok hossza. Nulla mértékű halmazok fogalma és tulajdonságai. Intervallum felosztása. A felfelé irányított rendezés, az általánosított sorozat és konvergenciájának definíciója. Monoton, korlátos általánosított sorozatok és tulajdonságai. Alsó és felső közelítő összeg.

**14. A Riemann-integrálhatóság kritériumai.** Korlátos függvény alsó és felső integrálja. Riemann-integrálhatóság definíciója. Oszcillációs összeg. A Riemann-integrálható függvények algebrát alkotnak.