1. Halmazfüggvények

I. Az $n = 1, 2, 3$ esetben adjuk meg az $A_n = \{1, \ldots, n\}$ halmazon az összes σ-algebrát.

II. Adjunk példát háromelemű, nem teljes és nem is σ-véges mértéktérre.

III. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér és tekintsük a

$$d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R} \qquad (A, B) \mapsto \mu(A \bigtriangleup B)$$

leképezést, ahol $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ a szimmetrikus differencia.

1. Mutassuk meg, hogy $(\mathcal{A}, d)$ metrikus tér.

2^*. Mutassuk meg, hogy a $(\mathcal{A}, d)$ tér teljes.

IV. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és minden $A, B \in \mathcal{A}$ esetén legyen $A \sim B$, ha $\mu(A \bigtriangleup B) = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció.

V^*. Mutassuk meg, hogy nincsen megszámlálhatóan végtelen elemszámú σ-algebra.

VI. Adjunk példát olyan halmazrendszerre, ami zárt az egyesítésre és a metszetképzésre, de nem gyűrű.

VII. Mutassuk meg, hogy gyűrűk Descartes-szorzata nem feltétlenül gyűrű.

VIII. Az alábbi X halmazokon értelmezett $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ halmazfüggvények külső mértékek-e, illetve mik lesznek a mérhető halmazok?

1. Az X nem üres halmaz, $x_0 \in X$ és minden $A \in \mathcal{P}(X)$ esetén

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x_0 \in A; \\ 0, & \text{ha} \quad x_0 \notin A. \end{cases}$$

2. Minden $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ esetén $\mu(A) = 1$.
3. Az $X = \{1, \ldots, 8\} \times \{1, \ldots, 8\}$ és $A \in \mathcal{P}(X)$ esetén

$$\mu(A) = \left|\{i \in \{1, \ldots, 8\} \,|\, \exists j \in \{1, \ldots, 8\} : \ (i, j) \in A\}\right|.$$

4. Az $X = \mathbb{N}$ és $A \in \mathcal{P}(X)$ esetén

$$\mu(A) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{x \in A \\ x \leq n}} 1.$$