2. Mérhető halmazok és függvények

I. Az $\mathbb{R}$ Borel- és Lebesgue-mérhető részhalmazai.

1. Mutassuk meg, hogy kontinuum sok nyílt részhalmaza van a valós számok halmazának.
2. Mutassuk meg, hogy kontinuum sok Borel-halmaza van a valós számok halmazának.
3. Mutassuk meg, hogy a $C \subseteq [0,1]$ Cantor-halmaz Lebesgue-mérhető és $\lambda(C) = 0$ teljesül.
4. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazainak a halmaza ekvipotens a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ halmazzal.
5. Mutassuk meg, hogy minden Borel-mérhető halmaz Lebesgue-mérhető.

II. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mértéktér, (M, d) metrikus tér és $f : X \to M$ függvény. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor mérhető, ha minden $U \subseteq M$ nyílt halmaz esetén $\overset{-1}{f}(U) \in \mathcal{A}$ teljesül.

III. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mértéktér, $f : X \to \mathbb{R}$ függvény. Igazoljuk, hogy az alábbiak ekvivalensek.

i. Az f függvény mérhető.
ii. $\forall c \in \mathbb{R} : \ \{x \in A | \ f(x) < c\} \in \mathcal{A}$
iii. $\forall c \in \mathbb{R} : \ \{x \in A | \ f(x) > c\} \in \mathcal{A}$
iv. $\forall c \in \mathbb{R} : \ \{x \in A | \ f(x) \leq c\} \in \mathcal{A}$
v. $\forall c \in \mathbb{R} : \ \{x \in A | \ f(x) \geq c\} \in \mathcal{A}$

IV. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mértéktér, $f, g : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény és $c \in \mathbb{R}$.

1. Legyen $Y = \{x \in X | \ f(x) < g(x) + c\}$. Igazoljuk, hogy
$$Y = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in X | \ f(x) < q\} \cap \{x \in X | \ q - c < g(x)\} \right).$$
2. Igazoljuk, hogy $f + g$, cf és fg is mérhető függvények.
3. Igazoljuk, hogy ha $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény, akkor $\varphi \circ f$ is mérhető.
4. Igazoljuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = |t|^\alpha$ Borel-mérhető függvény.
5. Igazoljuk, hogy $|f|$, $\sup(f, g) = \dfrac{f+g}{2} + \dfrac{|f-g|}{2}$, $\inf(f, g) = \dfrac{f+g}{2} - \dfrac{|f-g|}{2}$, $f_+ = \sup(f, 0)$ és $f_- = -\inf(f, 0)$ is mérhető függvény.

V. Mutassuk meg, hogy ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, akkor $\left\{x \in X | \ \exists \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)\right\} \in \mathcal{A}$.

VI. Igazoljuk, hogy ha az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazra $\lambda^*(A) > 0$ telejesül, akkor minden $\varepsilon \in [0, 1[$ számhoz létezik olyan $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, melyre $\lambda^*(A \cap I) > \varepsilon\lambda(I)$.

VII. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Mutassuk meg, hogy $\{A \in \mathcal{A} | \ \mu(A) = 0\}$ σ-gyűrű.

VIII. Legyen A a $[0, 1]$ intervallum azon elemeinek a halmaza, melyek tizedestört alakjában előbb szerepel a 2 számjegy mint a 3. Igazoljuk, hogy A Lebesgue-mérhető halmaz és határozzuk meg a Lebesgue-mértékét.

IX. Legyen X halmaz és $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-algebra. A
$$\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}} \qquad A \mapsto \nu(A)$$
halmazfüggvény *előjeles mérték*, ha

i. $\nu(\emptyset) = 0$;

ii. és ha minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_i \in \mathcal{A}$ és az $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer páronként diszjunkt, akkor a $\sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(A_i)$ sor konvergens, és

$$\nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(A_i)$$

teljesül.

1. Mutassuk meg, hogy ha $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ előjeles mérték, akkor ha minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_i \in \mathcal{A}$ és az $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer páronként diszjunkt, akkor a $\sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(A_i)$ sor abszolút konvergens.
2. Mutassuk meg, hogy ha ν_1, ν_2 előjeles mérték, és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\nu_1 + \nu_2$ illetve $c\nu_1$ is előjeles mérték. (Vagyis az előjeles mértékek vektorteret alkotnak.)
3. Jelölje $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ az $\mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ előjeles mértékek halmazát, és tekintsük a
$$d : \mathcal{M}(X,\mathcal{A}) \times \mathcal{M}(X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R} \qquad (\nu_1, \nu_2) \mapsto \min\left\{\sup_{A\in\mathcal{A}} |\nu_1(A) - \nu_2(A)|, 1\right\}$$
függvényt. Mutassuk meg, hogy $(\mathcal{M}(X,\mathcal{A}), d)$ metrikus tér.
4. Mutassuk, hogy az $(\mathcal{M}(X,\mathcal{A}), d)$ metrikus tér teljes.