3. Mértékbeni konvergencia

I. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $j(n), k(n) \in \mathbb{N}$ az $n = 2^{k(n)} + j(n)$ és $0 \leq j(n) < 2^{k(n)}$ tulajdonsággal meghatározott szám, és legyen

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in \left[\frac{j(n)}{2^{k(n)}}, \frac{j(n)+1}{2^{k(n)}}\right]; \\ 0, & \text{ha} \quad x < \frac{j(n)}{2^{k(n)}} \ \vee \ x > \frac{j(n)+1}{2^{k(n)}}. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ függvénysorozat mértékben konvergál az azonosan nulla függvényhez, de egyetlen pontban sem konvergens.

II. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $\mathcal{E}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} |\ f \text{ mérhető}\}$ és tekintsük az

$$d_\mu : \mathcal{E}(X) \times \mathcal{E}(X) \to \mathbb{R} \qquad (f,g) \mapsto \inf\left\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ |\ \mu\left([|f-g| > \varepsilon]\right) \leq \varepsilon\right\}$$

függvényt.

1. Mutassuk meg, hogy minden $f, g \in \mathcal{E}(X)$ függvényre

$$\mu\left([|f-g| > d_\mu(f,g)]\right) \leq d_\mu(f,g)$$

   teljesül.
2. Igazoljuk, hogy d_μ félmetrika.
3. Igazoljuk, hogy minden $f, g \in \mathcal{E}(X)$ függvény esetén $d_\mu(f,g) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f = g$ majdnem mindenütt.
4. Mutassuk meg, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathcal{E}(X)$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat mértékben konvergál az $f \in \mathcal{E}(X)$ függvényhez, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} d_\mu(f_n, f) = 0$.
5. Mutassuk meg, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathcal{E}(X)$, $f \in \mathcal{E}(X)$ és $\lim\limits_{n\to\infty} d_\mu(f_n, f) = 0$, akkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat mértékben konvergál az f függvényhez.

III. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény és legyen $f : X \to \mathbb{R}$ is mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor konvergál mértékben az f függvényhez, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden részsorozatának létezik olyan részsorozata, mely az f függvényhez konvergál majdnem mindenütt.

IV. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény és legyen $f, g : X \to \mathbb{R}$ is mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat mértékben konvergál az f és g függvényhez, akkor az $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat mértékben konvergál az $f + g$ függvényhez.