5. Főbb integráltételek

I. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f : X \to \mathbb{R}_0^+$ mérhető függvény és $E \in \mathcal{A}$ Mutassuk meg az alábbi ekvivalenciát.

$$\int_E f \,\mathrm{d}\,\mu < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E \cap [f \geq n]\right) < \infty$$

II. Számoljuk ki a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n \mathrm{d}\,\lambda(x)$ határértéket, ahol λ jelöli a Lebesgue-mértéket az $\mathbb{R}$ halmazon.

III. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nem véges mértéktér és $f : X \to \mathbb{R}_0^+$ korlátos mérhető függvény. Igazoljuk az alábbi ekvivalenciát.

$$\int_X f \,\mathrm{d}\,\mu < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu\left(\left[f > \frac{1}{2^n}\right]\right) < \infty$$

IV. Legyen

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 \leq x \ \wedge \ x \leq y < x + 1; \\ -1, & \text{ha} \quad 0 \leq x \ \wedge \ x + 1 \leq y < x + 2; \\ 0, & \text{ha} \quad 0 > x \ \vee \ (0 \leq x \wedge (y \geq x + 1 \ \vee \ y < x)), \end{cases}$$

és jelölje λ a Lebesgue-mértéket az $\mathbb{R}$ halmazon.

1. Számoljuk ki az

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \,\mathrm{d}\,\lambda(x) \,\mathrm{d}\,\lambda(y) \qquad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \,\mathrm{d}\,\lambda(y) \,\mathrm{d}\,\lambda(x)$$

   integrálokat.
2. Integrálható-e az f függvény a $\lambda \otimes \lambda$ szorzatmérték szerint?

V. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f : X \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető függvény és $g : X \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Mutassuk meg, hogy fg integrálható.

VI. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$f_1 : \mathbb{R} \times]0, 1[\to \mathbb{R} \qquad (t, x) \mapsto \left(\frac{3t^2}{x^2} - \frac{2t^4}{x^3}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{x}\right)$$

$$f_2 : \mathbb{R} \times]0, 1[\to \mathbb{R} \qquad (t, x) \mapsto \frac{t^3}{x^2} \exp\left(-\frac{t^2}{x}\right)$$

1. A paraméteres integrálok folytonosságára vonatkozó tétel alapján mutassuk meg, hogy a

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \int_0^1 f_2(t, x) \,\mathrm{d}\,\lambda(x)$$

   függvény folytonos a 0 pontban.
2. Igazoljuk, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén az $f_1(t, \cdot)$ függvény Lebesgue-integrálható.

3. Igazoljuk, hogy minden $x \in]0,1[$ esetén az $f_1(\cdot, x)$ függvény folytonos.
4. Igazoljuk, hogy a
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \int_0^1 f_1(t,x) \, \mathrm{d}\, \lambda(x)$$
függvény nem folytonos a 0 pontban.